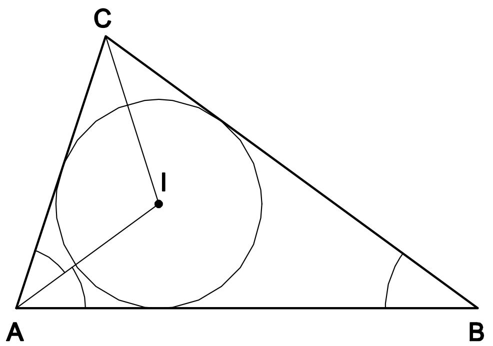
Svar på opgave 236 (Januar 2007)

Opgave:



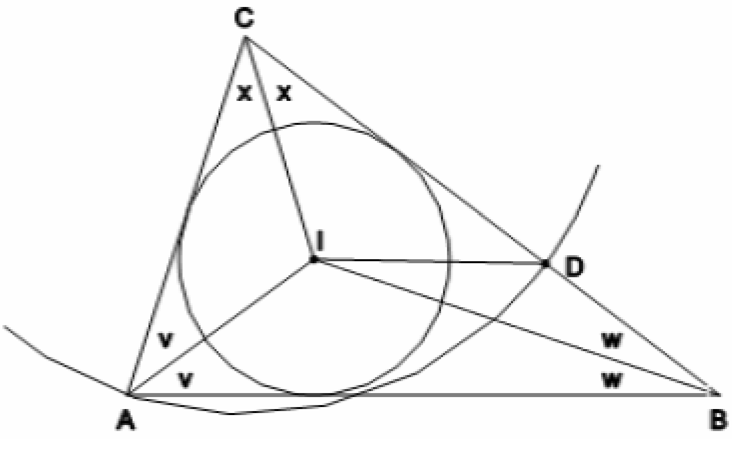
Vis, at der i ΔABC, hvor I er centrum for den indskrevne cirkel, gælder:

$$A = 2B \quad \Leftrightarrow \quad AI + AC = BC\ .$$

Besvarelse:

Vi skal vise, at der i ΔABC med centrum for den indskrevne cirkel i I, gælder, at $A = 2B$ netop hvis $AI + AC = BC$.

Vi antager, at $BC > AC$. Vi afsætter D på BC, så $CD = CA$. Da I er centrum for den indskrevne cirkel, er $\angle ICA = \angle DCI$ og da $CA = CD$, er ΔAIC og ΔIDC kongruente. Dermed er $DI = AI$ og $\angle IDC = \angle CAI$. Vi sætter $v = \frac{1}{2}A$ og $w = \frac{1}{2}B$.



I. Antag først, at $A = 2B$, dvs. $v = 2w$. Vi har, at

$$\angle BDI = 180° - v = 180° - 2w .$$

Dermed er $\angle DIB = w$ og ΔBDI er ligebenet, så $BD = DI = AI$. Da $AC = CD$, er

$$BC = BD + CD = AI + AC .$$

II. Antag så, at $BC = AI + AC$ eller $BC - AC = AI$. Da $AC = CD$, får vi

$$BD = BC - CD = BC - AC = AI = DI .$$

Men så er ΔBDI ligebenet, så $\angle DIB = w$ og $\angle BDI = 180° - 2w.$ Videre er

$$\angle BDI = 180° - \angle CDI = 180° - \angle CAI = 180° - v .$$

Heraf følger, at $v = 2w$ eller $A = 2B$.

Der kan ses flere interessante løsninger på denne opgave i *MatematikMagasinet* 33 (udkommer april 2007).

Der er modtaget 9 besvarelser.