Svar på opgave 237 (Februar 2007)

Opgave:

a. Find samtlige naturlige tal n, så $2^8 + 2^{11} + 2^n$ er et kvadrattal.

b. Vis, at tallene
$$a_n = 10^{2n} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^2 + 1 = 101010....01$$
med n+1 stk. 1-taller er sammensatte for $n > 1$.

Besvarelse:

a. Vi skal finde naturlige tal n, så tallet $2^8 + 2^{11} + 2^n$ er et kvadrattal.

Vi sætter
$$m^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^n = 2304 + 2^n \ .$$
Så har vi
$$2^n = m^2 - 2304 = (m - 48)(m + 48) \ .$$
På grund af primfaktoropløsningens entydighed findes eksponenter p og q, så
$$2^p = m - 48 \quad \text{og} \quad 2^q = m + 48 \quad \text{og} \quad p + q = n \ .$$
Da så $m = 2^p + 48 = 2^q - 48$, får vi
$$2^q - 2^p = 96 \ \Leftrightarrow \ 2^p(2^{q-p} - 1) = 2^5 \cdot 3 \ .$$
Nu er $2^{q-p} - 1$ ulige, så prinfaktoropløsningens entydighed giver, at
$$2^{q-p} - 1 = 3 \quad \text{så} \quad q - p = 2 \ .$$
Dermed er
$$2^p = 2^5 \quad \text{så} \quad p = 5 \ .$$
Så er $q = 7$ og $n = p + q = 12$. Dette er den eneste løsning til ligningen.

Bemærkning. Kjeld Ejrnæs, Tønder, anfører, at der gælder følgende formler:
Hvis n er lige:
$$2^n + 2^{n+3} + 2^{n+4} = 2^n(1 + 2^3 + 2^4) = 25 \cdot 2^n = \left(5 \cdot 2^{\frac{1}{2}n}\right)^2$$
Hvis n er ulige:
$$2^n + 2^n + 2^{n+4} = 2^n(1 + 1 + 2^4) = 18 \cdot 2^n = 9 \cdot 2^{n+1} = \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{2}(n+1)}\right)^2$$

b. Vi skal vise, at tallene

$$a_n = 10^{2n} + 10^{2n-2} + \cdots + 10^2 + 1$$

er sammensatte for $n > 1$.

For $n = 1$ er $a_1 = 101$ er primtal. De næste led i talfølgen er

$$a_2 = 10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \quad , \quad a_3 = 1010101 = 73 \cdot 101 \cdot 137$$

$$a_4 = 101010101 = 41 \cdot 271 \cdot 9091 \ .$$

Vi deler op efter pariteten af n.

I. *n* ulige. Vi ser for nemheds skyld på $n = 5$ og får

$$a_5 = 10^{10} + 10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1 = (10^{10} + 10^4) + (10^8 + 10^2) + 10^6 + 1$$

$$= 10^4(10^6 + 1) + 10^2(10^6 + 1) + 10^6 + 1 = (10^6 + 1)(10^4 + 10^2 + 1) = 1\,000\,001 \cdot 10101 \ .$$

I almindelighed er

$$a_n = (10^{n-1} + 10^{n-3} + \cdots + 10^2 + 1)(10^{n+1} + 1) \ ,$$

og da $n \geq 3$, er begge faktorer større end 1.

II. *n* lige. Vi ser på $n = 4$ og får

$$a_4 = 10^8 + 10^6 + 10^4 + 10^2 + 1 = (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)\,(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1) \ .$$

I almindelighed er

$$a_n = (10^n + 10^{n-1} + \cdots + 10 + 1)\,(10^n - 10^{n-1} + \cdots - 10 + 1) \ ,$$

og da $n \geq 2$, er begge faktorer større end 1.

Der er modtaget 8 besvarelser