Svar på opgave 238 (Marts 2007)

Opgave:

a. Vis, at hvis a, b og c er positive reelle tal og abc = 1, så er

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}=2$$

b. Vis, at der for alle positive reelle tal a, b og c gælder, at

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

c. Vis, at hvis a, b og c er positive reelle tal og $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$, så er

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 8$$

Besvarelse:

a. Vi omskriver først summen af de to første led således:

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}=\frac{a+1}{ab+a+abc}+\frac{b+1}{bc+b+1}=\frac{a+1}{a(bc+b+1)}+\frac{b+1}{bc+b+1}$$

$$=\frac{a+1+a(b+1)}{a(bc+b+1)}=\frac{ab+2a+1}{a(bc+b+abc)}=\frac{ab+2a+1}{ab(c+1+ac)}\ .$$

Dermed er

$$\frac{a+1}{ab+a+1}+\frac{b+1}{bc+b+1}+\frac{c+1}{ca+c+1}=\frac{ab+2a+1}{ab(c+1+ac)}+\frac{c+1}{ca+c+1}$$

$$=\frac{ab+2a+1+abc+ab}{ab(c+1+ac)}=\frac{2ab+2a+2}{abca+abc+ab}=\frac{2ab+2a+2}{a+1+ab}=2\ .$$

b. Vi omskriver sådan:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2}{(c+a)(c+b)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ 4a^2b + 4a^2c + 4b^2c + 4b^2a + 4c^2a + 4c^2b$$
$$\geq 6abc + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3b^2a + 3c^2a + 3c^2b$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b - 6abc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b^2a + c^2a - 2abc) + (a^2b + c^2b - 2abc) + (a^2c + b^2c - 2abc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b - c)^2 + b(a - c)^2 + c(a - b)^2 \geq 0 \ ,$$

hvilket er sandt.

c. Vi har at

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad ab + bc + ca = abc \ ,$$

og dermed

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - (ab + bc + ca) + a + b + c - 1 = a + b + c - 1 \ .$$

For alle positive tal x og y gælder som bekendt, at

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \ ,$$

så vi for positive a, b og c får vurderingen

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \ .$$

Derfor er $a + b + c \geq 9$, dvs.

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = a + b + c - 1 \geq 8 \ .$$

Der er modtaget 7 besvarelser på opgave 238.