Svar på opgave 239
(April 2007)

Opgave:

a. Vis, at der for ethvert naturligt tal n gælder, at

$$\text{int}(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}) = \text{int}\sqrt{4n+6}$$

hvor int(x) er det største hele tal, der er mindre end eller lig med x.

b. Bestem for ethvert naturligt tal n summen

$$S = \text{int}\sqrt{1} + \text{int}\sqrt{2} + \cdots + \text{int}\sqrt{n^2-1}$$

Besvarelse:

a. Vi betragter talfølgerne

$$a_n = \sqrt{n}+\sqrt{n+3} \quad \text{og} \quad b_n = \sqrt{4n+6} \quad \text{for} \quad n \geq 1$$

Det ønskede vil være godtgjort, hvis vi kan vise, at

$$\text{int}b_n \leq a_n < b_n \ .$$

Vi bemærker først, at der for positive tal x og y, der er forskellige, gælder uligheden

$$x + y < \sqrt{2(x^2+y^2)} \ ,$$

fordi den er ensbetydende med

$$x^2 + y^2 + 2xy < 2x^2 + 2y^2 \ \Leftrightarrow \ x^2 + y^2 - 2xy > 0 \ \Leftrightarrow \ (x-y)^2 > 0 \ ,$$

hvilket er sandt.

Hvis vi i uligheden vælger $x = \sqrt{n}$ og $y = \sqrt{n+3}$, får vi

$$a_n = \sqrt{n}+\sqrt{n+3} < \sqrt{2(n+n+3)} = \sqrt{4n+6} = b_n \ .$$

Desuden gælder, at

$$a_n = \sqrt{n}+\sqrt{n+3} \geq \sqrt{4n+5} \ ,$$

fordi

$$\sqrt{n}+\sqrt{n+3} \geq \sqrt{4n+5} \quad \Leftrightarrow \quad n + n + 3 + 2\sqrt{n(n+3)} \geq 4n + 5$$

$$\Leftrightarrow \ 2\sqrt{n(n+3)} \geq 2n+2 \ \Leftrightarrow \ 4n(n+3) \geq 4(n+1)^2 \ \Leftrightarrow \ n \geq 1 \ ,$$

hvilket er sandt.

På den anden side er $b_n^2 = 4n + 6$ ikke et kvadrattal for nogen naturlig værdi af n, fordi kvadrattal er kongruente med 0 eller 1 modulo 4 og $4n + 6 \equiv 2 \pmod 4$. Derfor er

$$\mathrm{int}\, b_n = \mathrm{int}\sqrt{4n+6} \le \sqrt{4n+6} \ ,$$

så

$$(\mathrm{int}\, b_n)^2 \le 4n + 6 \ ,$$

og da $4n + 6$ ikke er et kvadrattal, er

$$(\mathrm{int}\, b_n)^2 \le 4n + 5 \ \Leftrightarrow \ \mathrm{int}\, b_n \le \sqrt{4n+5} \le \sqrt{n} + \sqrt{n+3} = a_n \ .$$

b. Vi vil finde tallet

$$S = \mathrm{int}\sqrt{1} + \mathrm{int}\sqrt{2} + \cdots + \mathrm{int}\sqrt{n^2-1} \ .$$

Vi grupperer leddene i S sådan:

$$S = (\mathrm{int}\sqrt{1} + \mathrm{int}\sqrt{2} + \mathrm{int}\sqrt{3}) + (\mathrm{int}\sqrt{4} + \cdots + \mathrm{int}\sqrt{8})$$
$$+ (\mathrm{int}\sqrt{9} + \cdots + \mathrm{int}\sqrt{15}) + \cdots + (\mathrm{int}\sqrt{(n-1)^2} + \cdots + \mathrm{int}\sqrt{n^2-1}) \ .$$

Parenteserne indeholder 3, 5, 7, . . . led og hver led i parenteserne er lig med 1, 2, 3, ...
I almindelighed indeholder parentes nr. k $2k+1$ led, der alle har størrelsen k. Der er ialt $n - 1$ parenteser og den sidste parentes består af $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ led, der alle er lig med $n - 1$.

Altså er

$$S = 3\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 3 + 9\cdot 4 + \cdots + (2n-1)(n-1) \ ,$$

eller

$$S = \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)k = 2\sum_{k=1}^{n-1}k^2 + \sum_{k=1}^{n-1}k$$
$$= 2(1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) + (1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1) \ .$$

Nu er det kendt, at summen af de n første kvadrattal og summen af de n første tal er henholdsvis

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

og

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \tfrac{1}{2}n(n+1) \ .$$

Dermed er

$$S = 2\cdot\tfrac{1}{6}(n-1)\cdot n\cdot(2n-1) + \tfrac{1}{2}(n-1)\cdot n = \tfrac{1}{6}n(n-1)(4n+1) \ .$$

Der er indkommet 7 besvarelser.