Svar på opgave 240 (Maj 2007)

Opgave:

Lad $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ være et normeret polynomium med hele koefficienter.
Hvis polynomiet $p(x)^2$ har lutter ikke-negative koefficienter, gælder det samme så nødvendigvis for polynomiet p(x)?

Besvarelse:

Svaret er nej.

Et modeksempel er følgende:

$$(x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x + 4)^2 = x^8 + 4x^7 + 2x^6 + 2x^5 + 21x^4 + 10x^3 + x^2 + 24x + 16$$

Påstanden om, at ikke-negative hele koefficienter for $p(x)^2$ medfører det samme for $p(x)$ er imidlertid sand for polynomier af 1., 2. og 3. grad. Dette viser vi nu.

***p*(*x*) er af 1. grad.** Vi får, at hvis $p(x) = x + a$, er

$$p(x)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Hvis $2a \geq 0$, er også $a \geq 0$, så påstanden er sand for polynomier af 1. grad.

***p*(*x*) er af 2. grad.** Hvis $p(x) = x^2 + ax + b$, er

$$p(x)^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2b)x^2 + 2abx + b^2$$

Hvis $a = 0$, vil $a^2 + 2b \geq 0$ medføre, at $b \geq 0$. Hvis $a > 0$, vil $2ab \geq 0$ medføre, at $b \geq 0$. Derfor er påstanden sand for polynomier af 2. grad.

***p*(*x*) er af 3. grad.** Hvis $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, er

$$p(x)^2 = x^6 + 2ax^5 + (a^2 + 2b)x^4 + (2ab + 2c)x^3 + (b^2 + 2ac)x^2 + 2bcx + c^2 .$$

Hvis $a = 0$, er koefficienterne efter forudsætningen ikke-negative i polynomiet

$$p(x)^2 = x^6 + 2bx^4 + 2cx^3 + b^2x^2 + 2bcx + c^2 .$$

Derfor er $b \geq 0$ og $c \geq 0$ og påstanden er sand.
Lad så $a > 0$. Da $2bc \geq 0$, gælder en af følgende muligheder:

I. b og c er begge positive,
II. b og c er begge negative,
III. mindst en af de to tal b og c er lig med 0.

I tilfælde I er vi færdige. I tilfælde II ville koefficienten $2ab + 2c$ så være negativ, hvilket er en modstrid. I tilfælde III ville $b = 0$ sammen med $2ab + 2c \geq 0$ medfrøre $c \geq 0$, og vi er færdige. Hvis $c = 0$ (og $a > 0$), vil $0 \leq 2ab + 2c = 2ab$ medføre, at $b \geq 0$.

p(x) er af 4. grad. Hvis $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$, er

$$p(x)^2 = x^8 + 2ax^7 + (a^2 + 2b)x^6 + (2ab + 2c)x^5 + (b^2 + 2ac + 2d)x^4$$
$$+ (2ad + 2bc)x^3 + (c^2 + 2bd)x^2 + 2cdx + d^2 .$$

Som før er $a \geq 0$. Da $2bd \geq 0$ gælder, at hvis hverken c eller d er 0, har de same fortegn. Antag, at c og d er positive og lad $b = -1$.

Da $a^2 + 2b \geq 0$, er $a^2 \geq 2$. Vi vælger $a = 2$.

Derefter er

$$2ab + 2c \geq 0 \iff -4 + 2c \geq 0 \iff c \geq 2 .$$

Vi vælger $c = 3$. Nu er der nogle krav til d.

For det førsdte er

$$b^2 + 2ac + 2d \geq 0 \iff 1 + 12 + 2d \geq 0 ,$$

hvilket er opfyldt, da vi har antaget d positiv.

For det andet er

$$2ad + 2bc \geq 0 \iff 4d - 6 \geq 0 \iff d \geq \frac{3}{2} .$$

For det tredje er

$$c^2 + 2bd \geq 0 \iff 9 - 2d \geq 0 \iff d \leq \frac{9}{2} .$$

For det fjerde er $2cd \geq 0$, hvilket er opfyldt, fordi c og d er forudsat positive.

Hvis d antager en hel værdi mellem $\frac{3}{2}$ og $\frac{9}{2}$, dvs. $d = 2$, 3 eller 4, får vi et modeksempel, hvor alle koefficienterne i $p(x)^2$ er ikke-negative, men hvor $p(x)$ har den negative koefficient $b = -1$. Modeksemplet $d = 4$ er netop det, som vi indledte løsningen med at anføre.

Hvis man ønsker modeksempler af grad $n > 4$ grad, kan man blot multiplicere eksemplet i begyndelsen med x^{n-4}.