Svar på opgave 242 (September 2007)

Opgave:

Der er givet differensrækken

$$308 , 973 , 1638 , 2303 , 2968 , 3633 , 4298 .$$

Bestem en kvotientrække (b_n), $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ af hele tal, der ligger mellem leddene i differensrækken, dvs. (b_n) opfylder, at

$$308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2303 < b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298 .$$

Besvarelse:

Vi skal bestemme tallene $b_1, b_2, \ldots, b_6$, så de danner en kvotientrække, når

$$308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2303 < b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298 .$$

Tallene, som leddene b_n ligger mellem, udgør en differensrække.

Lad os betegne kvotienten med q. Så har vi, at $b_6 = b_1 \cdot q^5$. Da $b_1 \leq 972$ og $b_6 \geq 3634$, er

$$q^5 = \frac{b_6}{b_1} \geq \frac{3634}{972} \quad \text{så} \quad q \geq 1{,}3018 .$$

På den anden side er $b_6 \leq 4297$ og $b_1 \geq 309$, så

$$q^5 = \frac{b_6}{b_1} \leq \frac{4297}{309} \quad \text{så} \quad q \leq 1{,}6929 .$$

Intervallet [1,3018 ; 1,6929] er rigelig stort, så vi prøver med

$$b_6 = q^2 \cdot b_4 .$$

Da $b_6 \leq 4297$ og $b_4 \geq 2304$, er

$$q^2 = \frac{b_6}{b_4} \leq \frac{4297}{2304} \quad \text{så} \quad q \leq 1{,}3657 .$$

Dermed ligger q i intervallet [1,3018 ; 1,3657].

Da $b_6 = b_1 \cdot q^5$ g q kan skrives som en brøk $\frac{m}{n}$, er

$$b_6 \cdot n^5 = b_1 \cdot m^5 ,$$

og derfor er b_1 delelig med nævneren n^5. En nævner n over 3 kan ikke bruges, fordi $4^5 = 1024$ og dette tal går ikke op i b_1. Hverken $\frac{1}{1}$ eller $\frac{1}{2}$ har multipla mellem 1,3018 og 1,3657, så kun en nævner på 3 kan bruges. Derfor er $q = \frac{4}{3}$ eneste mulighed.

Vi har altså, at

$$b_6 = b_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 \quad \Leftrightarrow \quad 3^5 \cdot b_6 = 4^5 \cdot b_1 .$$

Altså er b_1 et multiplum af $3^5 = 243$, og da $309 \leq b_1 \leq 972$, er mulighederne for b_1 kun 486, 729 eller 972.

Hvis b_1 er 486 eller 729, ville $b_2 = \frac{4}{3} \cdot 486 = 648$ eller $b_2 = \frac{4}{3} \cdot 729 = 972$ i strid med, at $b_2 \geq 973$.

Vi har derfor kun muligheden $b_1 = 972$, så vi får

$$b_2 = \frac{4}{3} \cdot 972 = 1296 \quad , \quad b_3 = \frac{4}{3} \cdot 1296 = 1728 \quad , \quad b_4 = \frac{4}{3} \cdot 1728 = 2304 \ ,$$
$$b_5 = \frac{4}{3} \cdot 2304 = 3072 \quad , \quad b_6 = \frac{4}{3} \cdot 3072 = 4096 \ ,$$

og disse værdier opfylder kravene til b_n.