Svar på opgave 244 (November 2007)

Opgave:

a. Lad a, b og c være ikke-negative reelle tal, så $a + b + c = 1$. Vis, at

$$7(ab + ac + bc) \le 9abc + 2$$

b. Vis, at der for alle reelle tal a, b og c gælder:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 48 \ge 24abc$$

Besvarelse:

a. Da $a + b + c = 1$ vil vi vise, at

$$7(ab + ac + bc) \le 9abc + 2(a + b + c)^3 \,. \tag{1}$$

Vi har, at

$$ab + ac + bc = (ab + ac + bc)(a + b + c) = a^2(b + c) + b^2(a + c) + c^2(a + b) + 3abc \,.$$

Derfor er (1) ensbetydende med

$$\begin{aligned}
&7a^2(b + c) + 7b^2(c + a) + 7c^2(a + b) + 21abc \\
&\le 9abc + 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 6a^2(b + c) + 6b^2(c + a) + 6c^2(a + b) + 12abc \\
&\Leftrightarrow a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b) \le 2(a^3 + b^3 + c^3) \\
&\Leftrightarrow 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 - a^2b - a^2c - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b \ge 0 \\
&\Leftrightarrow a^3 - a^2b + b^3 - b^2c + c^3 - c^2a + a^3 - a^2c + b^3 - b^2a + c^3 - c^2b \ge 0 \\
&\Leftrightarrow a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a) + a^2(a - c) + b^2(b - a) + c^2(c - b) \ge 0 \\
&\Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) + (b - c)(b^2 - c^2) + (c - a)(c^2 - a^2) \ge 0 \\
&\Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) + (b - c)^2(b + c) + (c - a)^2(c + a) \ge 0 \,,
\end{aligned}$$

hvilket er sandt, fordi a, b og c er ikke-negative tal.

b. Vi skal vise, at der alle reelle tal gælder, at

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 48 \ge 24abc \,.$$

1. metode. Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \ge \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \iff (a^2 + b^2 + c^2)^2 \ge 9\left(\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^2 \quad .$$

Vi sætter $t = \sqrt[3]{abc}$ dvs. $t^2 = \sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, så vi kan skrive dette sådan:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 48 \geq 9t^4 + 48 \,.$$

Vi skal vise, at

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 48 \geq 24abc = 24t^3 \;,$$

så hvis vi kan vise, at

$$9t^4 + 48 \geq 24t^3 \quad \text{eller} \quad 9t^4 - 24t^3 + 48 \geq 0$$

er vi færdige. Nu er

$$9t^4 - 24t^3 + 48 = 3(t - 2)^2(3t^2 + 4t + 4) \geq 0 \;,$$

fordi diskriminanten i det sidste andengradspolynomium er negativ.

Lighedstegnet i uligheden gælder hvis $a = b = c$ i uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal og for $t = 2$ i den sidste ulighed. Lighedstegn indtræffer altså hvis $2^3 = t^3 = abc$, dvs. hvis $a = b = c = 2$.

2. metode (Anders Crone, Kalundborg). Vi benytter den kendte ulighed for positive tal:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz \,,$$

og sætter $x = a^2$, $y = b^2$ og $z = c^2$, så at

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \,.$$

Dermed har vi vurderingen

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 48 = a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2$$

$$\geq 3a^2b^2 + 3b^2c^2 + 3a^2c^2 + 48 \geq 4\sqrt[4]{3a^2b^2 \cdot 3a^2c^2 \cdot 3b^2c^2 \cdot 48}$$

$$= 4\sqrt[4]{(6abc)^4} = 24\ast abc\ast \geq 24abc \,.$$

Vi har her brugt uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal.

Lighedstegn gælder netop hvis $\ast a\ast = \ast b\ast = \ast c\ast = 2$ og netop et eller alle tre tal er positive. I den første ulighed skal gælde $a^4 = b^4 = c^4$ dvs. $\ast a\ast = \ast b\ast = \ast c\ast$, i den anden ulighed at $3a^2b^2 = 3a^4 = 48$, dvs. $\ast a\ast = 2$ og i den tredje at $abc \geq 0$.

Der er modtaget 4 besvarelser