Svar på opgave 247 (Februar 2008)

Opgave:

a. Skriv tallet $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}}$ som en sum af tal af formen 2^q, hvor q er rational.

b. Vis, at hvis a, b og c er positive reelle tal og $a + b + c = 1$, gælder

$$\frac{a^2+a}{a+bc}+\frac{b^2+b}{b+ac}+\frac{c^2+c}{c+ab}=3\ .$$

Symbolregner er selvfølgelig ikke tilladt.

Besvarelse:

Opgave a.

1. metode. Vi benytter formlerne

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \qquad (1)$$

og

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)\ , \qquad (2)$$

hvor $a = \sqrt{2}$ og $b = \sqrt[3]{2}$. Efter (2) er

$$a^6 - b^6 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4)\ ,$$

så vi får

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a+b}{a^2-b^2}=\frac{(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}=\frac{a^5+a^3b^2+ab^4+a^4b+a^2b^3+b^5}{a^6-b^6}\ .$$

Idet

$$a^6 - b^6 = \sqrt{2}^6-\sqrt[3]{2}^6=8-4=4\ ,$$

er nævneren rational og da leddene i tælleren udelukkende består af rationale potenser af 2, er opgaven i princippet løst. Vi får ved indsættelse af værdierne for a og b:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{1}{4}\left(4\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{2}+4+2\sqrt[3]{4}\right)$$
$$=\ 2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{6}}+2^{-\frac{1}{6}}+2^{\frac{1}{3}}+2^{0}+2^{-\frac{1}{3}}\ .$$

2. metode. Vi har formlen

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)\ ,$$

og hvis vi sætter $a = \sqrt{2}$ og $b = \sqrt[3]{2}$, fås ved forlængning med den sidste parentes:

$$\frac{1}{a-b}=\frac{a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5}{a^6-b^6} \quad ,$$

og derefter forløber regningerne som under 1. metode.

3. metode. Vi ser, at summen

$$x^3+x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}$$

er en kvotientrække med 6 led med kvotienten x^{-1} og første led x^3. For $x \neq -1$ er summen derfor

$$x^3+x^2+x+1+x^{-1}+x^{-2}=\frac{x^3\cdot(x^{-6}-1)}{x^{-1}-1}=\frac{x^{-3}-x^3}{x^{-1}-1}=\frac{x^6-1}{x^3-x^2} \quad ,$$

og hvis vi sætter $x=2^{\frac{1}{6}}$, er

$$2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{6}}+2^0+2^{-\frac{1}{6}}+2^{-\frac{1}{3}}=\frac{2-1}{2^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}} \quad .$$

Opgave b.

Hvis $a + b + c = 1$ skal vi vise, at

$$\frac{a^2+a}{a+bc}+\frac{b^2+b}{b+ca}+\frac{c^2+c}{c+ab}=3$$

Vi bemærker, at da $a = 1 - b - c$, er

$$a + bc = 1 - b - c + bc = (b - 1)(c - 1) \quad ,$$

og tilsvarende

$$b + ca = (c - 1)(a - 1) \quad \text{og} \quad c + ab = (a - 1)(b - 1) \quad .$$

Vi betegner summen af de tre broker med s og får

$$s=\frac{a^2+a}{a+bc}+\frac{b^2+b}{b+ca}+\frac{c^2+c}{c+ab}=\frac{a^2+a}{(b-1)(c-1)}+\frac{b^2+b}{(c-1)(a-1)}+\frac{c^2+c}{(a-1)(b-1)}$$

$$=\frac{(a-1)(a^2+a)+(b-1)(b^2+b)+(c-1)(c^2+c)}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\frac{a^3-a+b^3-b+c^3-c}{(a-1)(b-1)(c-1)} \quad .$$

Nu er $a + b + c = 1$, så

$$s=\frac{a^3+b^3+c^3-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}=\frac{a^3+b^3+c^3-(a+b+c)^3}{(a-1)(b-1)(c-1)} \quad .$$

Da vi har, at

$$a - 1 = -b - c \quad , \quad b - 1 = -a - c \quad , \quad c - 1 = -a - b$$

er

$$s=\frac{(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3}{(b+c)(c+a)(a+b)} \quad .$$

Vi bruger den (kendte?) faktoropløsning

$$(a + b + c)^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \, ,$$

så

$$s=\frac{a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)-a^3-b^3-c^3}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc}$$

$$=\frac{3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc)}{a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc}=3$$