Svar på opgave 248
(Marts 2008)

Opgave:

a. Vis, at hvis *a*, *b*, *c* og *d* er ikke-negative reelle tal, så er

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

b. Bestem det største hele tal, der ikke overstiger tallet

$$\frac{3^{2008}+2^{2008}}{3^{2006}+2^{2006}}$$

Besvarelse:

Opgave a.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2\ . \qquad (1)$$

1. metode.

Vi lægger første og tredje led sammen:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}=\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(b+c)(d+a)}\ . \qquad (2)$$

For ikke-negative tal x og y gælder

$$xy\leq \tfrac{1}{4}(x+y)^2 \quad ,$$

fordi denne ulighed er ensbetydende med $(x-y)^2 \geq 0$. Vi sætter $x = b + c$ og $y = a + d$, så vi får

$$(b+c)(a+d)\leq \tfrac{1}{4}(a+b+c+d)^2 \ .$$

Altså har vi efter (2) vurderingen

$$\frac{a}{b+c}+\frac{c}{d+a}=\frac{a^2+c^2+ad+bc}{(b+c)(d+a)} \geq \frac{4(a^2+c^2+ad+bc)}{(a+b+c+d)^2}\ . \qquad (3)$$

På samme måde kan vi vurdere summen af andet og fjerde led i (1):

$$\frac{b}{c+d}+\frac{d}{a+b}=\frac{b^2+d^2+ab+cd}{(c+d)(a+b)} \geq \frac{4(b^2+d^2+ab+cd)}{(a+b+c+d)^2}\ . \qquad (4)$$

Ved addition af (3) og (4) får vi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \geq 4\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= 4\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+(a+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2}\ .$$

Vi skal derfor blot vise, at

$$2\cdot\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+(a+c)(b+d)}{(a+b+c+d)^2} \;\ge\; 1\,. \qquad (5)$$

Uligheden (5) er ved multiplikation med nævneren ensbetydende med

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+(a+c)(b+d)) \;\ge\; (a+c)^2+(b+d)^2+2(a+c)(b+d)$$
$$\Leftrightarrow\quad 2(a^2+b^2+c^2+d^2) \;\ge\; (a+c)^2+(b+d)^2$$
$$\Leftrightarrow\quad 2a^2+2b^2+2c^2+2d^2 \;\ge\; a^2+b^2+c^2+d^2+2ac+2bd$$
$$\Leftrightarrow\quad a^2+b^2+c^2+d^2-2ac-2bd \ge 0 \;\Leftrightarrow\; (a-c)^2+(b-d)^2 \;\ge\; 0\,,$$

hvilket er sandt. Lighedstegnet gælder i uligheden (1) netop hvis $a = c$ og $b = d$.

2. metode.

Vi får ved udregning

$$(a+b+c+d)^2 = 2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd) - [(a-c)^2+(b-d)^2]\;,$$

hvoraf følger, at

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd) \;\ge\; (a+b+c+d)^2\;. \qquad (6)$$

Nu gælder for positive tal x og y uligheden

$$\frac{1}{xy} \;\ge\; \left(\frac{2}{x+y}\right)^2\;, \qquad (7)$$

fordi den er ensbetydende med $(x-y)^2 \ge 0$. Ved at benytte (7) får vi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} = \frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}$$
$$\ge\; \frac{4(a(d+a)+c(b+c))}{(a+b+c+d)^2}+\frac{4(b(a+b)+d(c+d))}{(a+b+c+d)^2}$$
$$= \frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd)}{(a+b+c+d)^2} \;\ge\; \frac{2(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2} = 2\,.$$

Her har vi benyttet (6) i det sidste ulighedstegn.

3. metode. Vi sætter

$$x_1=\sqrt{\frac{a}{b+c}}\;,\;\; x_2=\sqrt{\frac{b}{c+d}}\;,\;\; x_3=\sqrt{\frac{c}{d+a}}\;,\;\; x_4=\sqrt{\frac{d}{a+b}}\;,$$
$$y_1=\sqrt{a(b+c)}\;,\;\; y_2=\sqrt{b(c+d)}\;,\;\; y_3=\sqrt{c(d+a)}\;,\;\; y_4=\sqrt{d(a+b)}\;.$$

Cauchy-Schwarz ulighed

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2) \;\ge\; (x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2$$

giver så, at

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\right)(a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)) \;\ge\; (a+b+c+d)^2$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b} \;\ge\; \frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)}\;.$$

Vi vil vise, at

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+c)+b(c+d)+c(d+a)+d(a+b)} \ \geq \ 2 \ .$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$$
$$\geq \ 2ab+2ac+2bc+2bd+2cd+2ac+2ad+2bd$$
$$\Leftrightarrow \ a^2+b^2+c^2+d^2 \ \geq \ 2ac+2bd \ \Leftrightarrow \ (a-c)^2+(b-d)^2 \geq 0 \ ,$$

hvilket ser sandt.

Opgave b.

Vi skal finde den hele del af tallet

$$a = \frac{3^{2008}+2^{2008}}{3^{2006}+2^{2006}} \ .$$

Vi sætter $x = 3^{2006}$ og $y = 2^{2006}$. Så får vi

$$a = \frac{3^{2008}+2^{2008}}{3^{2006}+2^{2006}} = \frac{9x+4y}{x+y} = \frac{5x}{x+y} + \frac{4x+4y}{x+y} = \frac{5}{1+\frac{y}{x}} + 4 \ \leq \ 9 \ .$$

Nu er

$$\frac{y}{x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2006} ,$$

som er et 'vanvittig' lille tal (ca. $5{,}8 \cdot 10^{-354}$), så brøken ligger 'vanvittig' tæt på 5, men under 5. Derfor er den hele del lig med 8.