Svar på opgave 249
(April 2008)

Opgave:

Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$$
$$z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0$$
$$x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$$

Besvarelse:

1. metode.

Hvis (x,y,z) er en løsning, gælder

$$x^3 = 6z^2 - 12z + 8 > 0 \ ,$$

så $x > 0$. På samme måde er $y > 0$ og $z > 0$.

Addition af de tre ligninger giver

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + z^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x - 2)^3 + (y - 2)^3 + (z - 2)^3 = 0 \ . \qquad (1)$$

Vi deler op i tilfældene $x \geq 2$ og $0 < x < 2$.

I. $x \geq 2$. Den sidste af de tre ligninger giver

$$8 \leq x^3 = 6z^3 - 12z + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 6z(z - 2) \geq 0 \ .$$

Altså er $z = 0$ eller $z \geq 2$.

På samme måde er $y \geq 2$, og af (1) følger så, at $(x,y,z) = (2,2,2)$ er den eneste løsning i dette tilfælde.

II. $0 < x < 2$. Den sidste af de tre ligninger giver, at

$$8 > x^3 = 6z^3 - 12z + 8 \quad \Leftrightarrow \quad 6z(z - 2) < 0 \ ,$$

og da $z > 0$, må $z < 2$. På samme måde får vi $y < 2$, hvilket er i strid med (1).

Den eneste løsning til ligningssystemet er altså $(x,y,z) = (2,2,2)$.

2. metode.

Den første ligning giver

$$y^3 = 6x^2 - 12x + 8 = 6(x - 1)^2 + 2 \ ,$$

så

$$y^3 \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \sqrt[3]{2} \quad ,$$

og af symmetrigrunde gælder også $x \geq \sqrt[3]{2}$ og $z \geq \sqrt[3]{2}$. En løsning opfylder altså, at $x, y, z > 1$.

Vi ser på funktionerne

$$f(t) = t^3 \quad \text{og} \quad g(t) = 6t^2 - 12t + 8 = 6(t-1)^2 + 2 \ ,$$

som begge er voksende for $t > 1$. Hvis (x,y,z) er en løsning, for fx $y \geq z \geq x$, gælder

$$f(y) \geq f(z) \geq f(x) \quad . \tag{2}$$

Nu er

$$f(y) = g(x) \quad , \quad f(z) = g(y) \quad , \quad f(x) = g(z) \quad ,$$

så uligheden (2) kan skrives

$$g(x) \geq g(y) \geq g(z) \quad ,$$

og da som nævnt g er voksende for $t > 1$, er $x \geq y \geq z$.

Da således $y \geq z \geq x$ medfører, at $x \geq y \geq z$, kan vi slutte, at $x = y = z$, Andre størrelsesforhold mellem x, y og z fører til samme resultat. For enhver løsning gælder altså at $x = y = z$. Indsættes dette i den første af ligningerne, fås

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-2)^3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2 \ .$$

Derfor er $(x,y,z) = (2,2,2)$, hivlket også passer i de to øvrige ligninger.

3. metode.

På samme måde som under 2. metode ses, at $x, y, z \geq \sqrt[3]{2}$. Hvis $x = y$, fås i den første ligning

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \ \Leftrightarrow \ (x-2)^3 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = 2 \ .$$

Derefter giver de to sidste ligninger, at $z = 2$.

Antag så, at $x < y < z$. Ved subtraktion af ligninger fås

$$0 \ < \ y^3 - x^3 = 6x^2 - 12x + 8 - (6z^2 - 12z + 8)$$
$$= 6(x^2 - z^2) - 12(x - z) = 6(x - z)(x + z - 2) \ .$$

Men da $x < z$, er faktoren x-z negative og derfor er faktoren $x + z - 2$ negativ, dvs. $x + z < 2$. Oven for fandt vi imidlertid, at $x + z \geq 2\sqrt[3]{2}$. Dermed har vi opnået en mod- strid, så $x = y = z$ og $(x,y,z) = (2,2,2)$ er den eneste løsning.