Svar på opgave 251 (August 2008)

Opgave:

a. Find samtlige naturlige tal n, så både $n + 2008$ og $n - 2008$ er kvadrattal.

b. Vis, at der for alle naturlige tal n gælder, at $8^n - 3^n - 6^n + 1$ er delelig med 10.

Besvarelse:

a. Vi kan sætte

$$n + 2008 = a^2 \quad \text{og} \quad n - 2008 = b^2 \ ,$$

hvor a og b er naturlige tal. Ved addition fås

$$n = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \ ,$$

og desuden

$$a^2 - b^2 = 4016 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 2^4 \cdot 251 \ .$$

Vi har, at

$$0 < a - b \leq a + b \ ,$$

og at $a - b$ og $a + b$ har samme paritet (fordi deres forskel $2b$ er lige). Da deres produkt er lige, er de begge lige. Derfor har vi følgende muligheder:

$$(a - b \, , a + b) \ : \ (2 \, , 2008) \ , \ (4 \, , 1004) \ , \ (8 \, , 502) \ .$$

Disse giver henholdsvis

$$(a,b) \ : \ (1005 \, , 1003) \ , \ (504 \, , 500) \ , \ (255 \, , 247) \ .$$

De søgte værdier for n er

$$n = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \ : \ 1\,008\,017 \ , \ 252\,008 \ , \ 63017 \ .$$

Vi får som kontrol:

$$1008017 + 2008 = 1005^2 \quad , \quad 252008+2008 = 504^2$$
$$1008017 - 2008 = 1003^2 \quad , \quad 252008-2008 = 500^2$$

$$63017 + 2008 = 255^2$$
$$63017 - 2008 = 247^2$$

Kan man generalisere opgaven til at bestemme samtlige naturlige tal n, så $n \pm 2008$ begge er kubiktal?

b.

1. metode.

Tallene $3^n - 1$ og $8^n - 6^n$ er lige for alle n, og derfor er

$$s = 8^n - 6^n - (3^n - 1) = 8^n - 3^n - 6^n + 1$$

lige. Vi benytter formlen

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

og får

$$8^n - 3^n = (8 - 3)(8^{n-1} + 8^{n-2} \cdot 3 + \dots + 8 \cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}) = 5k$$

$$1 - 6^n = (1 - 6)(1^{n-1} + 1^{n-2} \cdot 6 + \dots + 1 \cdot 6^{n-2} + 6^{n-1}) = -5t\ .$$

Disse tal er altså begge multipla af 5 og derfor er også deres sum

$$s = 8^n - 3^n - 6^n + 1$$

et multiplum af 5, og da s desuden er lige, er det deleligt med 10.

2. metode **(Šefket Arslanagi, Sarajevo).**

Vi bruger induktion efter n. For $n = 1$ har vi at

$$8^1 - 3^1 - 6^1 + 1 = 0$$

er delelig med 10. Antag så, at der for et givet naturligt tal k gælder

$$8^k - 3^k - 6^k + 1$$

er delelig med 10. Vi ser på tallet

$$8^{k+1} - 3^{k+1} - 6^{k+1} + 1 = 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k - 6 \cdot 6^k + 1 = 8 \cdot (8^k - 3^k - 6^k + 1) + 5 \cdot 3^k + 2 \cdot 6^k - 7\ .$$

I det sidste tal er det første led efter induktionsforudsætningen deleligt med 10. Vi skal derfor vise, at

$$5 \cdot 3^k + 2 \cdot 6^k - 7$$

er deleligt med 10. Igen bruger vi induktion. For $k = 1$ er $5 \cdot 3^1 + 2 \cdot 6^1 - 7 = 20$ delelig med 10. Vi forudsætter, at det for en given værdi af p gælder, at

$$5 \cdot 3^p + 2 \cdot 6^p - 7$$

er deleligt med 10 og ser på tallet

$$5 \cdot 3^{p+1} + 2 \cdot 6^{p+1} - 7 = 15 \cdot 3^p + 12 \cdot 6^p - 7 = 3 \cdot (5 \cdot 3^p + 2 \cdot 6^p - 7) + 6 \cdot 6^p + 14\ .$$

I det sidste tal er første led efter induktionsforudsætningen deleligt med 10, så vi skal vise, at taller

$$6 \cdot 6^p + 14$$

er deleligt med 10. Igen bruges induktion. For $p = 1$ er $6 \cdot 6^1 + 14 = 50$ delelig med 10. Antag, at $6 \cdot 6^p + 14$ for en given værdi af p er delelig med 10. Så er

$$6 \cdot 6^{p+1} + 14 = 36 \cdot 6^p + 14 = 6 \cdot (6 \cdot 6^p + 14) - 70\ ,$$

som klart er deleligt med 10. Dermed er beviset ført.