Svar på opgave 254 (November 2008)

Opgave:

a.
Lad $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ være et polynomium med hele koefficienter.
Det oplyses, at a_0 er ulige og at $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ er ulige.
Vis, at $p(x)$ ikke har hele rødder.

b.
Bestem alle normerede polynomier $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,
så samtlige koefficienter a_k er ± 1 og alle rødder er reelle.

Besvarelse:

a. Polynomiet $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ med hele koefficienter opfylder, at a_0 er ulige og at $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ er ulige. Vi skal vise, at $p(x)$ ikke har hele rødder.

Vi bemærker først, at hvis a og b er to hele tal, så er $p(b) - p(a)$ delelig med $b - a$. Dette føler af at

$$p(b) - p(a) = a_n(b^n - a^n) + a_{n-1}(b^{n-1} - a^{n-1}) + \cdots + a_1(b - a)$$

og hvert af disse led er deleligt med $b - a$, fordi

$$b^k - a^k = (b - a)(a^{k-1} + a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}) .$$

Nu er $p(0) = a_0$ og efter bemærkningen gælder, at

$$p(2) - p(0) \text{ er delelig med } 2 - 0 = 2 \iff p(2) - a_0 \text{ er lige ,}$$

og da a_0 er ulige, må $p(2)$ være ulige. Videre fås

$$p(4) - p(2) \text{ er delelig med } 4 - 2 = 2 \iff p(4) - p(2) \text{ er lige ,}$$

og da $p(2)$ er ulige, må $p(4)$ være lige. Sådan fortsættes, dvs. funktionsværdierne af de lige tal er alle ulige.

Dernæst er

$$p(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n \quad .$$

Da $p(1)$ er ulige, slutter vi ligesom før, at $p(3)$ er ulige, $p(5)$ er ulige osv. Dermed er funktionsværdierne af alle ulige tal ulige.

For negative hele tal argumenteres tilsvarende. Da alle hele tals funktionsvlrdier således er ulige, kan ingen hele tal have en funktionsværdi på 0.

b. Lad rødderne i et polynomium af n-te grad af den omtalte type være $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Vi har så

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n)$$

og

$$0 \le r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n)^2 - 2(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \cdots + r_{n-1} r_n)$$
$$= a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases} .$$

Her må muligheden -1 forkastes, så vi har

$$r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = 3 .$$

Desuden er

$$r_1^2 \cdot r_2^2 \cdots r_n^2 = (r_1 \cdot r_2 \cdots r_n)^2 = a_0^2 = 1 .$$

Vi bruger nu uligheden mellem aritmetisk middeltal A og geometrisk middeltal G:

$$A \ge G \iff \frac{1}{n}(r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2) \ge \sqrt[n]{r_1^2 r_2^2 \cdots r_n^2}$$
$$\iff \frac{3}{n} \ge 1 \iff n \le 3 . \qquad (1)$$

Vi kan altså nøjes med at se på polynomier af højst 3. grad.

Tilfældene $n = 0$ og $n = 1$ giver polynomierne

$$1 \ , \ -1 \ , \ x + 1 \ , \ x - 1 \ .$$

Hvis $n = 2$ har vi 4 muligheder

$$x^2 + x + 1 \text{ med rødderne } \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x^2 - x + 1 \text{ med rødderne } \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 + x - 1 \text{ med rødderne } \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad , \quad x^2 - x - 1 \text{ med rødderne } \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \ .$$

Hvis $n = 3$ gælder lighedstegnet $A = G$, så alle r_i^2 er ens og lig med 1. Hver rod er altså ± 1. Vi har forskellige muligheder:

I. $r_1 = r_2 = r_3 = 1$. Vi får polynomiet $(x - 1)^2$, hvori ikke alle koefficienterne er ± 1.

II. $r_1 = r_2 = r_3 = -1$. Vi får polynomiet $(x + 1)^2$, hvori ikke alle koefficienterne er ± 1.

III. Et af tallene r_1, r_2, r_3 er -1, de to andre 1. Vi får polynomiet

$$(x - 1)^2(x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1 .$$

IV. Et af tallene r_1, r_2, r_3 er 1, de to andre -1. Vi får polynomiet

$$(x + 1)^2(x - 1) = x^3 + x^2 - x - 1 .$$

Dette udtømmer samtlige muligheder, og vi har ialt fundet 8 polynomier af den ønskede type:

$$-1 \ , \ 1 \ , \ x + 1 \ , \ x - 1 \ , \ x^2 + x - 1 \ , \ x^2 - x - 1$$
$$x^3 - x^2 - x + 1 \ , \ x^3 + x^2 - x - 1 \ .$$