Svar på opgave 255 (December 2008)

Opgave:

Hvis *a*, *b* og *c* er sider i en trekant, skal det vises, at

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}<\frac{1}{16} \ .$$

Besvarelse:

1. metode. Antag først, at trekantens sider er navngivet så $c \le b \le a$. Vi udregner

$$x=\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a} \ .$$

Hvis trekantens sider ombenævnes cyklisk, så fx $b \le a \le c$, nliver udtrykket *x* til

$$\frac{c-a}{c+a}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c} \ ,$$

dvs. det er uændret. Hvis ombenævnelsen sker ikke-cyklisk, dvs. $c \le b \le a$ omdøbes til $a \le b \le c$, bliver *x* forvandlet til

$$\frac{c-b}{c+b}+\frac{b-a}{b+a}+\frac{a-c}{a+c} \ ,$$

hvilket er -*x*. Vi antager, at $a \le b \le c$ og vælger at se på

$$\frac{a-c}{a+c}+\frac{c-b}{c+b}+\frac{b-a}{b+a} \ .$$

Vi sætter

$$b = a + h \ , \ c = b + k = a + h + k \ ,$$

hvor $h, k \ge 0$. Trekantuligheden giver, at

$$a + b > c \quad \Leftrightarrow \quad a + a + h > a + h + k \quad \Leftrightarrow \quad a > k \ .$$

Så er

$$\frac{a-c}{a+c}+\frac{c-b}{c+b}+\frac{b-a}{b+a}=\frac{-h-k}{2a+h+k}+\frac{k}{2a+2h+k}+\frac{h}{2a+h}=\frac{hk(h+k)}{(2a+h+k)(2a+2h+k)(2a+h)} \ .$$

Vi påstår, at denne brøk er højst $\frac{1}{20}$, dvs. en skærpelse af den krævede ulighed. Vi omskriver sådan:

$$\frac{hk(h+k)}{(2a+h+k)(2a+2h+k)(2a+h)}<\frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow \quad 20hk(h + k) < (2a + h)(2a + 2h + k)(2a + h + k) \ .$$

Da $k < a$ er det tilstrækkeligt at vise, at

$$20hk(h + k) < (2k + h)(2k + 2h + k)(2k + h + k)$$

$$\Leftrightarrow \quad 20hk(h + k) < (2k + h)(3k + 2h)(3k + h)$$

$$\Leftrightarrow \quad 20h^2k + 20hk^2 < 2h^3 + 13h^2k + 27hk^2 + 18k^3$$

$$\Leftrightarrow \quad 18k^3 + 7hk^2 - 7h^2k + 2h^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 18k^3 + h(7k^2 - 7hk + 2h^2) > 0$$

$$\Leftrightarrow \; 18k^3 + h(7(k - \tfrac{1}{2}h)^2 + \tfrac{1}{4}h^2) > 0 \; ,$$

hvilket er sandt, fordi h og k er ikke-negative.

2. metode. Da a, b og c er sider i en trekant, kan vi sætte

$$a = x + y \quad , \quad b = y + z \quad , \quad c = x + z \; ,$$

hvor x, y og z er positive (tallene x, y og z angiver afstandene fra vinkelspidserne til røringspunkterne for den indskrevne cirkel. Vi får, at

$$a - b = x - z \quad , \quad b - c = y - x \quad , \quad a - c = y - z$$
$$a + b = x + 2y + z \quad , \quad b + c = x + y + 2z \quad , \quad a + c = 2x + y + z \; .$$

Dermed er

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} = \frac{(x-z)(y-x)(y-z)}{(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z)} \; .$$

Vi ønsker at vise et stærkere resultet end det, der er angivet i opgaven. Vi ønsker nemlig at bestemme et tal s (så stort som muligt), så

$$-\frac{1}{s} < \frac{(x-z)(y-x)(y-z)}{(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z)} < \frac{1}{s} \; .$$

Vi begynder med den højre ulighed:

$$\frac{(x-z)(y-x)(y-z)}{(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z)} < \frac{1}{s}$$

$$\Leftrightarrow \quad s(x - z)(y - x)(y - z) < (x + 2y + z)(x + y + 2z)(2x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \quad (2x^3 + (s + 7)xz^2) + (2y^3 + (s + 7)yx^2) + (2z^3 + (s + 7)zy^2) + 16xyz$$
$$> (s - 7)zx^2 + (s - 7)xy^2 + (s - 7)yz^2 \; . \qquad (1)$$

Dad et arimetiske gennemsnit er større end det geometriske, har vi at

$$2x^3 + (s + 7)xz^2 \geq 2 \cdot \sqrt{2x^3 \cdot (s+7)xz^2} = zx^2 \cdot \sqrt{8(s+7)}$$

$$2y^3 + (s + 7)yx^2 \geq 2 \cdot \sqrt{2y^3 \cdot (s+7)yx^2} = xy^2 \cdot \sqrt{8(s+7)}$$

$$2z^3 + (s + 7)zy^2 \geq 2 \cdot \sqrt{2z^3 \cdot (s+7)zy^2} = yz^2 \cdot \sqrt{8(s+7)} \; .$$

Vi ser dermed, at uligheden (1) er opfyldt for ethvert s, der opfylder at

$$zx^2 \cdot \sqrt{8(s+7)} + xy^2 \cdot \sqrt{8(s+7)} + yz^2 \cdot \sqrt{8(s+7)} > (s-7)zx^2 + (s-7)xy^2 + (s-7)yz^2 \; .$$

Vi kan antage, at s > 7, så denne ulighed er ensbetydende med

$$\sqrt{8(s+7)} > s - 7 \quad \Leftrightarrow \quad s^2 - 22s - 7 < 0 \; .$$

Den største rod i polynomiet $p(s) = s^2 - 22s - 7$ er $s = 11 + 8\sqrt{2}$, og denne værdi er derfor den største, vi kan anvende her. Vi konkluderer, at

$$\frac{(x-z)(y-x)(y-z)}{(x+2y+z)(x+y+2z)(2x+y+z)} < \frac{1}{11+8\sqrt{2}} = \frac{1}{22{,}3137} \; .$$

Uligheden er dermed skærpet en del.