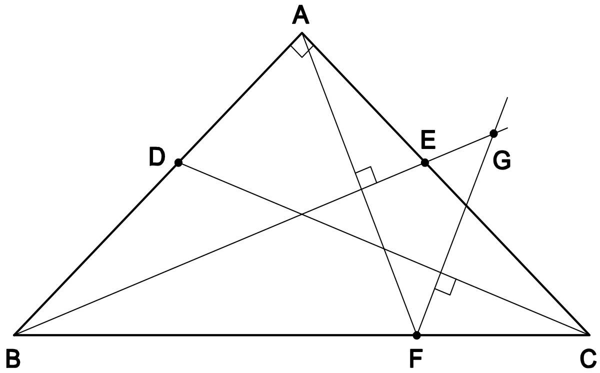
Svar på opgave 259 (April 2009)

Opgave:

ΔABC er ligebenet og retvinklet og $A = 90°$.
Punkterne D og E ligger på AB og AC,
så $AD = AE$.
Linjen gennem A vinkelret på BE skærer BC i F og linjen gennem F vinkelret på CD skærer BE i G.

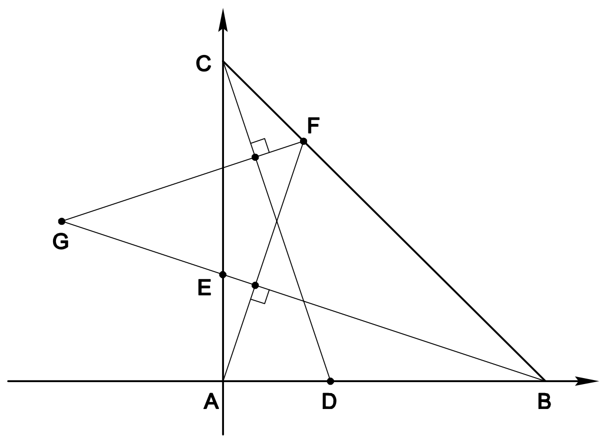
Vis, at $BG = AF + FG$.



Besvarelse:

1. metode.

Vi fører et bevis med analytisk geometri.



Vi anbringer A i (0,0) og B og C får koordinaterne B $(b,0)$ og C $(0,b)$.

Punkterne D og E er D $(a,0)$ og E $(0,a)$.
BE har hældningen $-\frac{a}{b}$, så ligningen for AF er

$$AF: \; y = \frac{b}{a}x$$

og ligningen for BC er

$$BC: \; y = b - x$$

Dette ligningssystem giver koordinaterne til F:

$$F \; : \; \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{b^2}{a+b}\right) \; .$$

Hældningen for CD er $-\frac{b}{a}$, så FG har hældningen $\frac{a}{b}$. Dermed er ligningen for FG:

$$FG \; : \; y - \frac{b^2}{a+b} = \frac{a}{b}\left(x - \frac{ab}{a+b}\right) \; ,$$

og BG har ligningen

$$BG \ : \ \ y = -\tfrac{a}{b}x + a \ .$$

Ved løsning af dette ligningssystem får vi koordinaterne til *G*:

$$G \ : \ \left(\tfrac{b(2a-b)}{2a} \, , \, \tfrac{b}{2}\right) \ .$$

Endelig finder vi afstandene:

$$AF = \sqrt{\frac{a^2b^2 + b^4}{(a+b)^2}} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$$

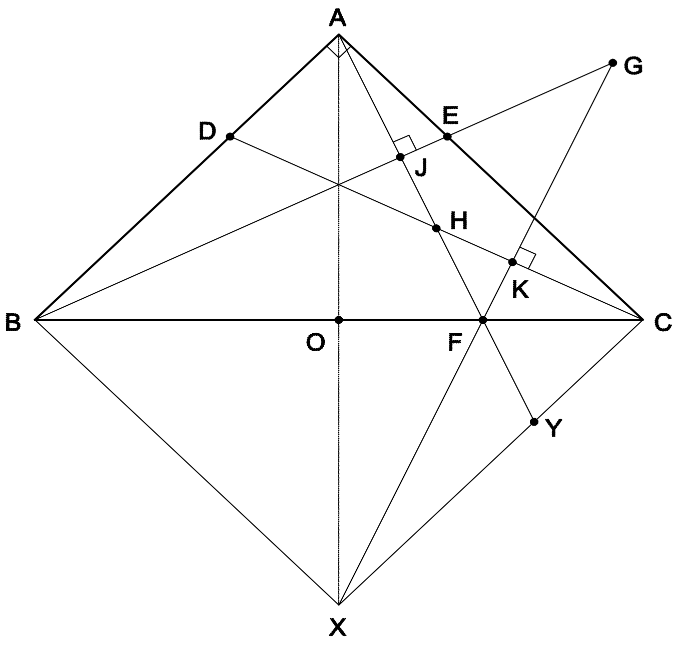
$$FG = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b} - \frac{b(2a-b)}{2a}\right)^2 + \left(\frac{b^2}{a+b} - \frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b(b-a)\sqrt{a^2+b^2}}{2a(a+b)}$$

$$BG = \sqrt{\left(\frac{b(2a-b)}{2a} - b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{2a} \ ,$$

og heraf fremgår, at *BG* = *AF* + *FG*.

2. metode **(John Rigby, Wales).**

Δ*ABC* udvides til kvadratet *ACXB*, hvor *X* er spejlbilledet af *A* i *BC*.
Vi sætter *v* = ∠*EBC* og lader *H* være skæringspunkt mellem *AF* og *CD* og *J* skæringspunkt mellem *AF* og *BE*. Desuden forlænges *AF* til skæring med *CX* i *Y*.



Nu er ∠*ABE* = 45° - *v* og i den retvinklede Δ*BAJ* er

∠*BAJ* = 90° - (45° - *v*) = 45° + *v*

og dermed

∠*FAC* = 90° - (45° + *v*) = 45° - *v*

Da også ∠*DCA* = 45° - *v*, er Δ*AHC* ligebenet, så *AH* = *HC*.

Betragt Δ*AHD* og Δ*YHC*. Disse trekanter er kongruente, fordi

$$AH = HC \quad , \quad \angle AHD = \angle YHC \quad , \quad \angle HCY = 45° + v = \angle BAJ = \angle HAD \quad .$$

Dermed er *HY* = *HD*.

Punktet *F* forbindes med *X*. Lad *O* være skæringspunkt mellem *AX* og *BC*. I Δ*BOA* er ∠*BAO* = 45°, så

$$\angle OAF = \angle BAF - \angle BAO = \angle BAJ - \angle BAO = 45° + v - 45° = v \ .$$

I ΔAOF er så $\angle OFA = 90° - v$. Hvis K er skæringspunkt mellem CD og FG får vi i ΔCKF, at $\angle CFK = 90° - v$ og da F ligger på midtnormalen for AX, er

$$\angle OFX = \angle OFA = 90° - v = \angle CFK \quad .$$

Derfor ligger X, F og G på linje.
I ΔOFX er $\angle OXF = v$, så vi har

$$\angle GBX = \angle EBX = v + 45° = \angle BXG \quad ,$$

så ΔBGX er ligebenet og $BG = XG$. Derfor kan vi skrive:

$$BG = XG = XF + FG = AF + FG \ .$$