Svar på opgave 260 (Maj 2009)

Opgave:

De reelle tal a og b opfylder, at

$$3^a + 13^b = 17^a \text{ og } 5^a + 7^b = 11^b \ .$$

Vis, at $a < b$.

Besvarelse:

Vi fører et indirekte bevis og antager, at $a \geq b$. Så er

$$13^a \geq 13^b \text{ og } 5^a \geq 5^b \ ,$$

og dermed

$$3^a + 13^a \geq 3^a + 13^b = 17^a \ ,$$

hvoraf

$$\left(\tfrac{3}{17}\right)^a + \left(\tfrac{13}{17}\right)^a \geq 1 \ . \qquad (1)$$

Nu er funktionen

$$f(x) = \left(\tfrac{3}{17}\right)^x + \left(\tfrac{13}{17}\right)^x$$

aftagende, fordi den er sum af to aftagende funktioner. Vi har, at

$$f(1) = \frac{16}{17} < 1 \ ,$$

og dermed er efter (1):

$$f(a) \geq 1 > f(1) \ ,$$

og da f er aftagende, er $a < 1$.
Tilsvarende får vi

$$5^b + 7^b \leq 5^a + 7^b = 11^b$$

hvoraf

$$\left(\tfrac{5}{11}\right)^b + \left(\tfrac{7}{11}\right)^b \leq 1 \ . \qquad (2)$$

Funktionen

$$g(x) = \left(\tfrac{5}{11}\right)^x + \left(\tfrac{7}{11}\right)^x$$

er aftagende og $g(1) = \frac{12}{11} > 1$. Dermed er efter (2):

$$g(b) \leq 1 < g(1) \ ,$$

og da g er aftagende, er $b > 1$. Vi har fundet, at $a < 1 < b$, hvilket er i strid med forud- sætningen $a \geq b$.