Svar på opgave 261 (August 2009)

Opgave:

Bestem samtlige par (x,y) af naturlige tal, så $x^2 + 3y$ og $y^2 + 3x$ begge er kvadrattal.

Besvarelse:

1. metode.

Da x og y er positive, kan vi skrive sådan:

$$x^2 + 3y = (x + a)^2$$
$$y^2 + 3x = (y + b)^2 ,$$

hvor a og b er naturlige tal. Dette ligningssystem er ensbetydende med følgende:

$$3y = 2ax + a^2$$
$$3x = 2by + b^2 \;\; ,$$

og dette system har løsningen

$$x = \frac{2a^2b + 3b^2}{9 - 4ab} \quad , \quad y = \frac{2b^2a + 3a^2}{9 - 4ab} \quad .$$

Da nævnerne i brøkerne skal være positive, findes kun mulighederne $ab = 1$ eller $ab = 2$. Vi har altså

$(a,b) = (1,1)$ giver $(x,y) = (1,1)$
$(a,b) = (1,2)$ giver $(x,y) = (16,11)$
$(a,b) = (2,1)$ giver $(x,y) = (11,16)$.

Disse muligheder opfylder betingelserne:

$$11^2 + 3 \cdot 16 = 169 = 13^2 \quad \text{og} \quad 16^2 + 3 \cdot 11 = 289 = 17^2 \;\; .$$

2. metode (Šefket Arslanagić, Sarajevo).

Vi kan antage, at $x < y$. Så er

$$y^2 < y^2 + 3x \le y^2 + 3y \le y^2 + 4y + 4 = (y + 2)^2 \; .$$

Altså er

$$y^2 < y^2 + 3x < (y + 2)^2 \; ,$$

og da $y^2 + 3x$ er et naturligt tal, må

$$y^2 + 3x = (y + 1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 + 3x = y^2 + 2y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = \tfrac{1}{2}(3x - 1) \; .$$

Da y er et naturligt tal, er x ulige, så vi sætter

$$x = 2a + 1 \quad \text{hvoraf} \quad y = \tfrac{1}{2}(6a + 3 - 1) = 3a + 1$$

Nu har vi, at

$$x^2 + 3y = (2a + 1)^2 + 3(3a + 1) = 4a^2 + 13a + 4 \ .$$

Dette skal være et kvadrattal, så der findes et naturligt tal k, så

$$4a^2 + 13a + 4 = k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 64a^2 + 208a + 64 = 16k^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (8a + 13)^2 - 105 = (4k)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (8a + 13)^2 - (4k)^2 = 105$$

$$\Leftrightarrow \quad (8a + 13 + 4k)(8a + 13 - 4k) = 105 \ .$$

Nu har vi faktoroplønsingerne

$$105 = 105 \cdot 1 = 35 \cdot 3 = 21 \cdot 5 = 15 \cdot 7 \ .$$

Vi deler op i de 4 mulige tilfælde.

I. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 8a + 13 + 4k &= 105 \\ 8a + 13 - 4k &= 1 \end{aligned}$$

har løsningen $a = 5$, $k = 13$, hvoraf

$$x = 2a + 1 = 11 \ , \ y = 3a + 1 = 16 \ ,$$

så

$$x^2 + 3y = 11^2 + 3 \cdot 16 = 13^2 \quad , \quad y^2 + 3x = 16^2 + 3 \cdot 11 = 17^2 \ .$$

II. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 8a + 13 + 4k &= 35 \\ 8a + 13 - 4k &= 3 \end{aligned}$$

giver $a = \frac{3}{4}$, hvilket ikke er et naturligt tal.

III. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 8a + 13 + 4k &= 21 \\ 8a + 13 - 4k &= 5 \end{aligned}$$

giver $a = 0$, $k = 2$, så

$$x = 2a + 1 = 1 \quad , \quad y = 3a + 1 = 1$$

så

$$x^2 + 3y = 1^2 + 3 \cdot 1 = 2^2 \quad , \quad y^2 + 3x = 1^2 + 3 \cdot 1 = 2^2 \ .$$

IV. Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 8a + 13 + 4k &= 15 \\ 8a + 13 - 4k &= 7 \end{aligned}$$

giver $a = -\frac{1}{4}$, som ikke er et naturligt tal.

Vi har dermed fundet løsningerne

$$(x,y) = (1,1) \quad , \quad (x,y) = (11,16) \quad , \quad (x,y) = (16,11) \ .$$