Svar på opgave 263 (Oktober 2009)

Opgave:

a. Funktionen f opfylder for alle hele tal x, at $f(x+1) = \dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ og at $f(1) = 2$. Bestem $f(2009)$.

b. Bestem alle reelle funktioner f for hvilke $f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$.

Besvarelse:

a. Vi har, at

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

for alle hele x. Vi får, at

$$f(2) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)} = \frac{1+2}{1-2} = -3 \quad , \quad f(3) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)} = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$$

$$f(4) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)} = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \quad , \quad f(5) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)} = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2 = f(1) \ .$$

Herefter gentager funktionsværdierne sig efter mønsteret

$$f(n+4) = f(n) \ .$$

Altså er

$$f(2009) = f(2005) = f(2001) = \cdots = f(5) = 2 \ .$$

b.

1. metode. Vi har, at

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x) \ . \qquad (1)$$

Vi sætter

$$y = \frac{x+1}{1-3x} \quad \text{hvoraf} \quad x = \frac{y-1}{3y+1} \ .$$

Af (1) får vi så

$$f(y) = \frac{y-1}{3y+1} - f\left(\frac{y-1}{3y+1}\right) \qquad \text{eller} \qquad f(x) = \frac{x-1}{3x+1} - f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right) \qquad (2)$$

I (2) sætter vi

$$x = \frac{z-1}{3z+1} \quad \text{hvoraf} \quad z = \frac{x+1}{1-3x} \ .$$

Så er

$$\frac{x-1}{3x+1}=\frac{\frac{z-1}{3z+1}-1}{3\cdot\frac{z-1}{3z+1}+1}=\frac{z+1}{1-3z}\ ,$$

så vi af (2) får

$$f\left(\frac{z-1}{3z+1}\right)=\frac{z+1}{1-3z}-f\left(\frac{z+1}{1-3z}\right)\quad \text{eller}\quad f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=\frac{x+1}{1-3x}-f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)\ . \qquad (3)$$

Nu lægger vi ligningerne (1), (2) og (3) sammen:

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+f(x)+f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=x-f(x)+\frac{x-1}{3x+1}-f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)+\frac{x+1}{1-3x}-f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)$$

eller

$$2\cdot f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+2\cdot f(x)+2\cdot f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=x+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{x+1}{1-3x}$$

$$\Leftrightarrow\quad f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+f(x)+f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{x+1}{1-3x}\right)\ . \qquad (4)$$

Efter (3) er

$$f\left(\frac{x+1}{1-3x}\right)+f\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=\frac{x+1}{1-3x}\ ,$$

hvilket indsat i (4) giver

$$\frac{x+1}{1-3x}+f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x-1}{3x+1}+\frac{x+1}{1-3x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x-1}{3x+1}-\frac{x+1}{1-3x}\right)=\frac{9x^3-6x^2+x-2}{18x^2-2}\ .$$

2. metode (Hans Christian Hulvej, Marselisborg Gymnasium). Det er klart, at $f(x)$ ikke er defineret for $x=\frac{1}{3}$ og da

$$\frac{1+x}{1-3x}=\frac{1}{3}\quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{3}$$

er den heller ikke defineret for $x=-\frac{1}{3}$. Vi sætter

$$g(x)=\frac{1+x}{1-3x}$$

og får for $x\pm\frac{1}{3}$ at

$$g(g(x))=g\left(\frac{1+x}{1-3x}\right)=\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\cdot\frac{1+x}{1-3x}}=\frac{1-3x+1+x}{1-3x-3-3x}=\frac{2-2x}{-2-6x}=\frac{x-1}{3x+1}$$

og

$$g(g(g(x)))=g\left(\frac{x-1}{3x+1}\right)=\frac{1+\frac{x-1}{3x+1}}{1-3\cdot\frac{x-1}{3x+1}}=\frac{3x+1+x-1}{3x+1-3x+3}=\frac{4x}{4}=x$$

Den givne betingelse kan skrives som

$$f(g(x)) = x - f(x)\ . \qquad (5)$$

I (5) erstattes x med $g(x)$:

$$f(g(g(x))) = g(x) - f(g(x))\ . \qquad (6)$$

I (5) erstattes x med $g(g(x))$

$$f(g(g(g(x)))) = g(g(x)) - f(g(g(x))) \iff f(x) = g(g(x)) - f(g(g(x)))$$

$$\iff f(g(g(x)) = g(g(x)) - f(x)\ . \qquad (7)$$

Nu indsættes (7) i (6):

$$g(g(x)) - f(x) = g(x) - f(g(x))\ , \qquad (8)$$

og (5) indsættes i (8):

$$g(g(x)) - f(x) = g(x) - x + f(x) \iff f(x) = \tfrac{1}{2}[g(g(x)) - g(x) + x]\ . \qquad (9)$$

Heri indsættes forskrifterne for $g(x)$ og $g(g(x))$ og man får

$$f(x) = \frac{9x^3 + 6x^2 - x + 2}{18x^2 - 2}\ .$$

Dette er den eneste reelle funktion, der opfylder betingelserne.