Svar på opgave 264 (November 2009)

Opgave:

Lad a, b, c og d være ikke-negative reelle tal, så $a + b + c + d = 1$.

a. Vis, at
$$abc + abd + acd + bcd \le \frac{1}{16} \ .$$

b. Vis, at
$$abc + bcd + dca \le \frac{4}{81} \ .$$

Besvarelse:

a. Vi benytter uligheden
$$xy \le \tfrac{1}{4}(x+y)^2 \ , \qquad (1)$$
som gælder for alle reelle tal, fordi den er ensbetydende med
$$4xy \le (x+y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4xy \le x^2 + y^2 + 2xy \quad \Leftrightarrow \quad (x-y)^2 \ge 0.$$
Vi får så
$$abc + bcd + cda + dab = bc(a+d) + da(c+b) \le \tfrac{1}{4}(b+c)^2 \cdot (a+d) + \tfrac{1}{4}(d+a)^2 \cdot (c+b)$$
$$= \tfrac{1}{4}(a+d)(b+c) \cdot (b+c+d+a) = \tfrac{1}{4}(a+d)(b+c) \le \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{4}(a+d+b+c)^2 = \tfrac{1}{16} \ .$$
Det sidste ulighedstegn stammer fra (1) med $x = a + d$ og $y = b + c$.

b.

<u>*1. metode*</u>

Vi benytter uligheden
$$(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+xz) \ ,$$
som gælder for alle reelle tal. Uligheden er nemlig ensbetydende med
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xy + 2xz \ \ge \ 3xy + 3yz + 3xz$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz \ge 0 \ \Leftrightarrow \ (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \ge 0 \ .$$
Nu er
$$abc + bcd + cda = c(ab + bd + da) \le c \cdot \tfrac{1}{3}(a+b+d)^2 = \tfrac{1}{3}c(1-c)^2 = \tfrac{1}{6} \cdot 2c \cdot (1-c) \cdot (1-c) \ .$$

Da c ligger i intervallet [0;1], er c og 1 - c ikke-negative tal, så vi kan bruge uligheden mellem geometrisk og aritmetisk middeltal:

$$xyz \le \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

og får

$$2c(1-c)(1-c) \ \le \ \left(\frac{2c+1-c+1-c}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Altså får vi

$$\frac{2c(1-c)(1-c)}{6} \ \le \ \frac{1}{6}\cdot\frac{8}{27} = \frac{4}{81} \quad .$$

<u>*2. metode*</u>

Vi anvender igen uligheden

$$xy \le \tfrac{1}{4}(x+y)^2$$

og får

$$abc + bcd + dca = bc(a+d) + dca \le bc(a+d) + c\cdot\tfrac{1}{4}(a+d)^2$$

$$= \tfrac{1}{4}c(a+d)(a+d+4b) = \tfrac{1}{48}\cdot 4c\cdot 3(a+d)(a+d+4b) \quad .$$

Da det geometriske middeltal højst er lig med det aritmetiske, gælder for ikke-negative tal x, y og z, at

$$xyz \le \tfrac{1}{27}(x+y+z)^3 \ ,$$

og benyttes dette med $x = 4c$, $y = 3(a + d)$ og $z = a + d + 4b$ fås

$$\tfrac{1}{48}\cdot 4c\cdot 3(a+d)(a+d+4b) \le \tfrac{1}{48}\cdot\tfrac{1}{27}\cdot(4c+3(a+d)+(a+d+4b))^3$$

$$= \tfrac{1}{1296}\cdot(4(a+b+c+d))^3 = \tfrac{1}{1296}\cdot 4^3\cdot 1^3 = \tfrac{4}{81} \ .$$