Svar på opgave 265 (December 2009)

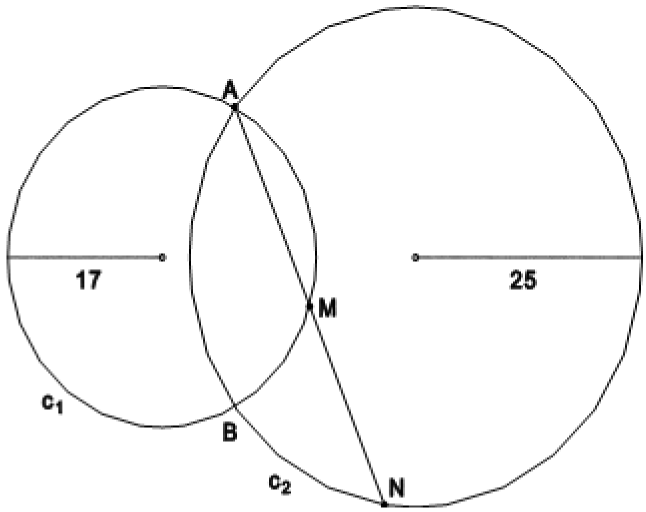
Opgave:

Cirklen c_1 med radius 17 skærer cirklen c_2 med radius 25 i A og B.

Afstanden mellem cirklernes centrer er 28.

N er et punkt på c_2, så midtpunktet M af korden AN ligger på c_1.

Bestem længden af AN.

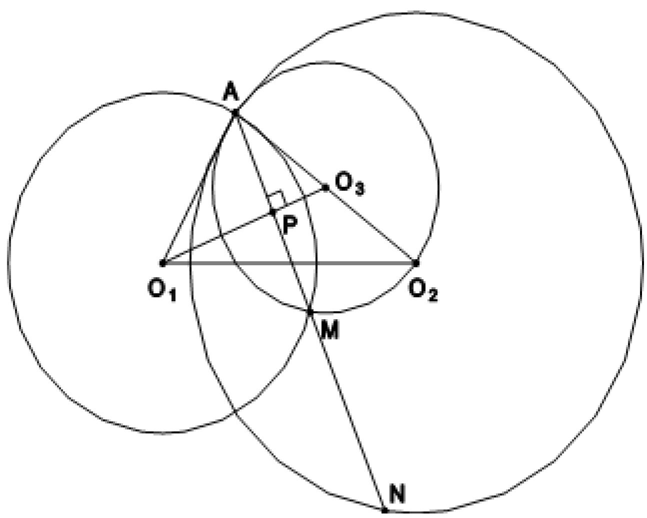


Besvarelse:

1. metode.

Vi tegner cirklen med centrum O_3 som midtpunktet af AO_2 og med radius O_3A. Denne cirkel fås af cirklen c_2 ved en multiplikation ud fra A med faktoren $\frac{1}{2}$. Ved denne multiplikation føres N over i M og da M også ligger på c_1, er M skæringspunkt mellem c_1 og c_3.

Lad P være skæringspunkt mellem O_1O_3 og AM. Da AM er fælleskorde for c_1 og c_3, er $AM \perp O_1O_3$, og P er midtpunkt af AM.



Vi ser på ΔO_1AO_2, hvor $AO_1 = 17$, $AO_2 = 25$ og $O_1O_2 = 28$. Så er

$$\cos A = \frac{17^2 + 25^2 - 28^2}{2 \cdot 17 \cdot 25} = \frac{13}{85} \ ,$$

og dermed

$$\sin^2 A = 1 - \frac{13^2}{85^2} = \frac{85^2 - 13^2}{85^2} = \frac{84^2}{85^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin A = \frac{84}{85} \ .$$

Arealet af ΔO_1AO_3 er

$$[O_1AO_3] = \tfrac{1}{2} \cdot AO_1 \cdot AO_3 \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{84}{85} = 105 \ .$$

Vi finder O_1O_3 i ΔO_1AO_3:

$$O_1O_3^{\ 2} = AO_1^{\ 2} + AO_3^{\ 2} - 2 \cdot AO_1 \cdot AO_3 \cdot \cos A$$

$$= 17^2 + \frac{25^2}{4} - 2 \cdot 17 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{13}{85} = \frac{39^2}{2^2}$$

så at $O_1O_3 = \frac{39}{2}$.

Da $AP \perp O_1O_3$, er AP højde i ΔO_1AO_3 så

$$[O_1AO_3] = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot O_1O_3 \quad \Leftrightarrow \quad 105 = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot \frac{39}{2} \quad \Leftrightarrow \quad AP = \frac{140}{13} \ .$$

Da P er midtpunkt af AM og M er midtpunkt af AN, er

$$AN = 4 \cdot AP = \underline{\underline{\frac{560}{13}}} \ .$$

2. metode.

AD skærer c_1 i E.

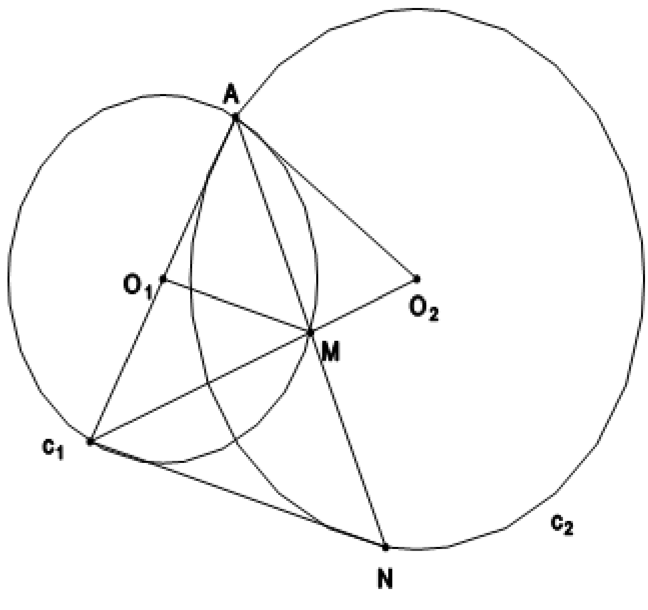
I ΔO_1AO_2 fås

$$\cos A = \frac{17^2 + 25^2 - 28^2}{2 \cdot 17 \cdot 25} = \frac{13}{85} \ .$$

I ΔAEO_2 fås

$$EO_2^{\ 2} = 34^2 + 25^2 - 2 \cdot 34 \cdot 25 \cdot \cos A = 1781 - 1700 \cdot \tfrac{13}{85} = 1521 = 39^2 \ ,$$

så $EO_2 = 39$.



Da AE er diameter i c_1, er $\angle AME$ ret og da AN er korde med midtpunkt M i c_2 og O_2 er centrum, er $\angle AMO_2$ ret, så E, M og O_2 ligger på linje. I ΔAEN er EM midtnormal og samtidig højde, så trekanten er ligebenet. Altså er $EN = EA = 34$.

Vi kan nu bestemme arealet af ΔAEO_2 ved hjælp af Herons formel. Den halve omkreds er

$$\tfrac{1}{2}(34 + 25 + 39) = 49 \ ,$$

så arealet er

$$[AEO_2] = \sqrt{49\cdot(49-34)\cdot(49-25)\cdot(49-39)} = 420 \ .$$

På den anden side er også

$$[AEO_2] = \tfrac{1}{2}\cdot AM\cdot EO_2 = \tfrac{1}{2}\cdot AM\cdot 39 \ ,$$

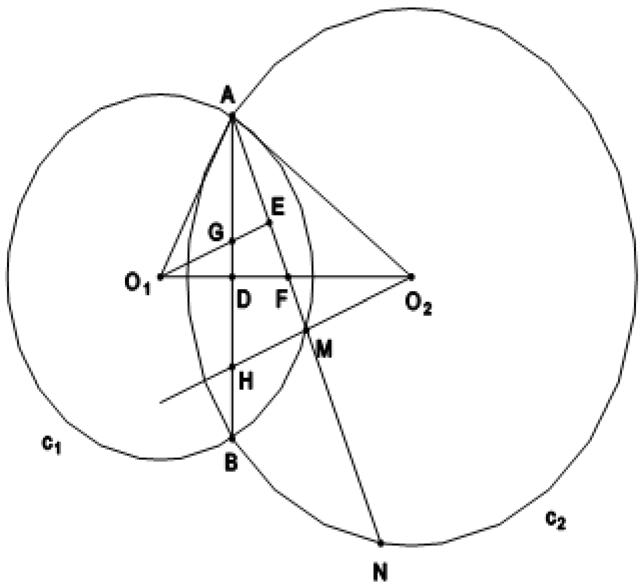
så vi får

$$420 = \tfrac{1}{2}\cdot AM\cdot 39 \quad\Leftrightarrow\quad AM = \frac{840}{39} = \frac{280}{13} \quad\Leftrightarrow\quad AN = \underline{\underline{\frac{560}{13}}} \ .$$

3. metode.

Da AM er korde i c_1, går midtnormalen EO_1 for AM gennem centrum O_1. Tilsvarende er MO_2 midtnormal for AN.

EO_1, MO_2 og O_1O_2 skærer AB i G, H og D og AN skærer O_1O_2 i F.



Vi sætter $p = DO_1$ så vi i ΔDAO_1 får

$$AD^2 = 17^2 - p^2 \ ,$$

og i ΔDAO_2 er

$$AD^2 = 25^2 - DO_2^{\,2} = 25^2 - (28 - p)^2 \ ,$$

hvoraf

$$17^2 - p^2 = 25^2 - (28 - p)^2 \quad\Leftrightarrow\quad p = 8 \ .$$

Desuden er

$$DO_2 = O_1O_2 - DO_1 = 18 - p = 20 \ ,$$

og

$$AD^2 = 17^2 - 8^2 = 15^2 \quad\Leftrightarrow\quad AD = 15 \ .$$

Nu er ΔGDO_1 og ΔHDO_2 ensvinklede, så

$$\frac{GD}{DO_1} = \frac{HD}{DO_2} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{GD}{8} = \frac{HD}{20} \quad\Leftrightarrow\quad GD = \tfrac{2}{5}DH \ . \qquad (1)$$

I ΔAHM er GE midtpunktstransversal, så

$$AD - GD = AG = GH = GD + DH$$

$$\Leftrightarrow\quad 15 - GD = GD + DH \quad\Leftrightarrow\quad DH = 15 - 2\cdot GD \ ,$$

så (1) giver

$$GD = \tfrac{2}{5}(15 - 2\cdot GD) \quad\Leftrightarrow\quad GD = \tfrac{10}{3} \ ,$$

hvoraf

$$DH = 15 - 2\cdot GD = 15 - \tfrac{20}{3} = \tfrac{25}{3} \ .$$

I den retvinklede ΔHDO_2 fås

$$HO_2^{\,2} = \left(\tfrac{25}{3}\right)^2 + 20^2 \quad\Leftrightarrow\quad HO_2 = \tfrac{65}{3} \ .$$

Videre er

$$HA = HD + DA = \tfrac{25}{3} + 15 = \tfrac{70}{3} \ ,$$

og da ΔHDO_2 og ΔHMA er ensvinklede, får vi

$$\frac{AM}{DO_2} = \frac{AH}{HO_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AM}{20} = \frac{\frac{70}{3}}{\frac{65}{3}} \quad \Leftrightarrow \quad AM = \frac{280}{13} \ .$$

Altså er

$$AN = 2 \cdot AM = \underline{\underline{\frac{560}{13}}} \ .$$