Svar på opgave 267 (Februar 2010)

Opgave:

Vis, at der findes præcis en hel værdi af tallet *n*, så tallet

$$K = \frac{12n^3 - 5n^2 - 25n + 389}{6n^2 - 37n + 45}$$

er helt.

Besvarelse:

1. metode.

Vi får ved division

$$K(n) = \frac{12n^3 - 5n^2 - 25n + 389}{(3n-5)(2n-9)} \ .$$

Antag, at $K(n)$ er hel. Så er også $K(n) \cdot (2n - 9)$ hel, dvs.

$$K(n) \cdot (2n-9) = \frac{12n^3 - 5n^2 - 25n + 389}{3n-5} = 4n^2 + 5n + \frac{389}{3n-5}$$

er hel. Dette medfører, at brøken er et helt tal, så $3n - 5$ går op i 389. Da 389 er et primtal, må altså

$$3n - 5 = \pm 1 \quad \text{eller} \quad 3n - 5 = \pm 389 \ .$$

Disse ligninger giver

$$3n - 5 = 1 \iff n = 2 \quad , \quad 3n - 5 = -1 \iff n = \tfrac{4}{3}$$
$$3n - 5 = 389 \iff n = \tfrac{394}{3} \quad , \quad 3n - 5 = -389 \iff n = -128 \ .$$

Idet $K(2) = -83$ og $K(-128) = -\frac{12979}{53}$ er $K(n)$ kun hel for $n = 2$.

2. metode.

Polynomiers division giver, at

$$K(n) = 2n + \frac{69n^2 - 115n + 389}{6n^2 - 37n + 45} \ .$$

Det ses, at $K(n)$ er et helt tal, netop hvis

$$L(n) = \frac{69n^2 - 115n + 389}{6n^2 - 37n + 45}$$

er helt. dvs. netop hvis

$$2\cdot L(n)=\frac{138n^2-230n+778}{6n^2-37n+45}=23+\frac{621n-257}{6n^2-37n+45}$$

er et lige helt tal, dvs.

$$M(n)=\frac{621n-257}{6n^2-37n+45} \tag{1}$$

er et lige helt tal. Da 45 ikke går op i 257, kan vi i det følgende forudsætte, at $n\neq 0$. For $|n|>111$ gælder, at

$$|621n-257|\leq 621\cdot|n|+257=6\cdot|n|\cdot\left(\frac{621}{6}+\frac{257}{6|n|}\right)$$

$$<6\cdot|n|\cdot 104<6\cdot|n|\cdot\left||n|-\frac{37}{6}+\frac{45}{|n|}\right|<\left|6n^2-37n+45\right| \ .$$

Det andet ulighedstegn følger af, at

$$\frac{621}{6}+\frac{257}{6|n|}<104 \quad\Leftrightarrow\quad 621+\frac{257}{|n|}<624 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{257}{|n|}<3 \quad\Leftrightarrow\quad |n|>85\tfrac{2}{3} \ ,$$

hvilket er sandt. Der tredje ulighedstegn følger af at

$$104<|n|-\frac{37}{6}+\frac{45}{|n|} \quad\Leftrightarrow\quad 104|n|<n^2-\frac{37}{6}|n|+45 \quad\Leftrightarrow\quad 6n^2-661\cdot|n|+270>0 \ ,$$

og denne andengradsulighed er opfyldet for $|n|<0,41$ eller $|n|>109,7$.

Altså er tælleren numerisk mindre end nævneren i brøken (1) for $|n|>111$. Vi skal altså blot for tallene $|n|\leq 111$ udregne værdierne af $M(n)$. En computer finder værdien n = 2, hvor $M(2)$ = -197 og $K(2)$ = -83.