Svar på opgave 269 (April 2010)

Opgave:

Vis, at der for sidelængderne a, b og c i enhver trekant gælder

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc \ > \ a^3 + b^3 + c^3$$

Besvarelse:

1. metode.
Vi skal vise, at uligheden

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc \ > \ a^3 + b^3 + c^3$$

er opfyldt for sidelængderne i enhver trekant.
Vi får ved udregning, at uligheden er ensbetydende med

$$ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 2abc \ > \ a^3 + b^3 + c^3 \ .$$

$$\Leftrightarrow \quad a(b^2 + c^2 - a^2) + b(c^2 + a^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot 2bc \cos A + b \cdot 2ac \cos B + c \cdot 2ab \cos C - 2abc > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2abc(\cos A + \cos B + \cos C - 1) > 0 \ .$$

Vi skal altså vise, at

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 > 0 \ .$$

Vi benytter de logaritmiske formler for $\cos A + \cos B$ og at

$$1 - \cos C = 2\sin^2 \tfrac{C}{2}$$

så vi får

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1 = 2\cos\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2} - 2\sin^2\tfrac{C}{2}$$

$$= 2\cos\tfrac{\pi - C}{2}\cos\tfrac{A-B}{2} - 2\sin^2\tfrac{C}{2} = 2\sin\tfrac{C}{2}\cdot\left(\cos\tfrac{A-B}{2} - \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{A+B}{2}\right)\right)$$

$$= 2\sin\tfrac{C}{2}\cdot\left(\cos\tfrac{A-B}{2} - \cos\tfrac{A+B}{2}\right) = 2\sin\tfrac{C}{2}\cdot 2\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2} = 4\sin\tfrac{A}{2}\sin\tfrac{B}{2}\sin\tfrac{C}{2} \ .$$

Dette produkt er klart positivt.

Vi bemærker desuden, at der gælder den (kendte?) formel

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R} \ ,’$$

hvor R og r er radius i trekantens om- og indskrevne cirkel. Heraf fås tsraks, at

$$\cos A + \cos B + \cos C > 1 \ .$$

Interesserede kan finde et bevis for formlen i Carstensen & Muminagić: *Matematiske juveler* (2006).

2. metode.
Vi minder om de kendte standardformler for en vilkårlig trekant med areal T og omkredsen $2s$:

$$T = rs \quad , \quad 4RT = abc \iff abc = 4Rrs \, .$$

Desuden er

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2s(s^2 - 6Rr - 3r^2) \quad \text{og} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 + r^2 - 2Rr) \; ,$$

som er mindre kendte. Et bevis for disse findes I *LMFK-Bladet*, marts 1997.
Så får vi

$$ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (a^3 + b^3 + c^3) \, .$$

Altså er

$$ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\iff 2s \cdot 2(s^2 + r^2 - 2Rr) + 2 \cdot 4Rrs > 2s(s^2 - 6Rr - 3r^2)$$

$$\iff 2s^3 + 2sr^2 - 4Rrs - 8Rrs > 2s^3 - 12Rrs - 6sr^2 \iff 8sr^2 > 0 \; ,$$

hvilket er sandt.

3. metode.
Efter Herons formel gælder

$$T^2 = s(s - a)(s - b)(s - c) > 0 \, .$$

Vi får ved at gange parenteserne med hinanden, at

$$s^4 - s^3(a + b + c) + s^2(ab + ac + bc) - abcs > 0$$

$$\iff s^4 - 2s^4 + s^2(ab + ac + bc) - abcs > 0 \iff s^2(ab + ac + bc) > s^4 + sabc$$

$$\iff s(ab + ac + bc) > s^3 + abc \iff \frac{a+b+c}{2} \cdot (ab + ac + bc) > \frac{(a+b+c)^3}{8} + abc$$

$$\iff ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 2abc > a^3 + b^3 + c^3$$

hvilket er ensbetydende med den ulighed, der skulle vises.

4. metode.
Vi viser en metode uden trigonometri. Da a, b og c er sider i en trekant er
$a + b > c$, $a + c > b$ og $b + c > a$. Derfor gælder

$$(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) > 0$$

$$\iff -a^3 - b^3 - c^3 + ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 2abc > 0$$

$$\iff ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 2abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\iff a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) - 2abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\iff [a(b^2 + c^2 - 2bc) + 2abc] + [b(c^2 + a^2 - 2ca) + 2bca] + [c(a^2 + b^2 - 2ab) + 2cab] - 2abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\iff a(b^2 + c^2 - 2bc) + b(c^2 + a^2 - 2ca) + c(a^2 + b^2 - 2ab) + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$$

$$\iff a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \; ,$$

hvilket er det ønskede.