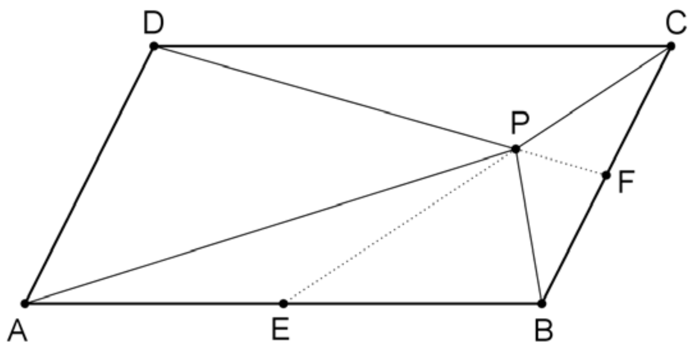
Svar på opgave 270 (Maj 2010)

Opgave:

I parallelogrammet *ABCD* er *E* og *F* midtpunkter af *AB* og *BC*. Linjerne *DF* og *CE* skærer hinanden i *P*.

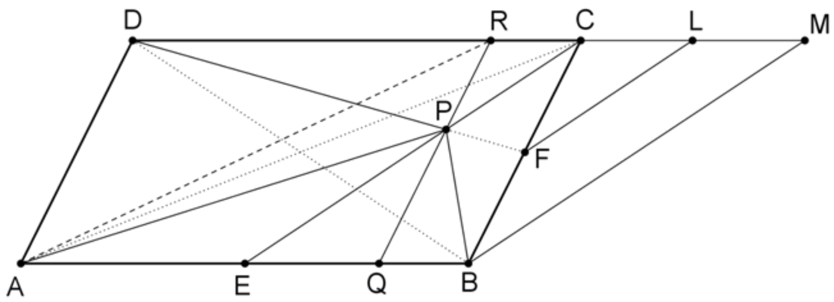
Vis, at linjestykkerne *PA*, *PB*, *PC* og *PD* deler parallelogrammet i fire trekanter, hvis arealer forholder sig som 1 : 2 : 3 : 4.



Besvarelse:

1. metode.

Gennem *F* og *B* trækkes linjer parallelle med *CE*. De skærer *CD* i *L* og *M*. En linje gennem *P* parallel med *BC* skærer *AB* og *CD* i *Q* og *R*.



I. Da F er midtpunkt af BC og $FL \parallel BM$, er

$$2CL = CM = EB = DK\ .$$

Derfor er

$$DK = \tfrac{1}{2}DC \quad , \quad DL = DC + CL = DC + \tfrac{1}{2}CM = DC + \tfrac{1}{4}DC \quad ,$$

hvoraf

$$\frac{DC}{DL} = \frac{DC}{\frac{5}{4}DC} = \frac{4}{5}\ .$$

Da ΔDFL og ΔDPR er ensvinklede, er

$$\frac{PF}{DF} = \frac{CL}{DL} = \frac{DL - DC}{DL} = 1 - \frac{DC}{DL} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\ . \tag{1}$$

Nu har ΔBCP og ΔBCD samme grudnlinje og derfor er deres arealer proportionale med stykkerne PF og DF, så hvis arealet af paralelogrammet er W, er

$$[BPC] = \tfrac{1}{5}[BDC] = \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}W = \tfrac{1}{10}W$$

II. Da ΔDPR og ΔDFC er ensvinklede, er

$$\frac{DP}{DF} = \frac{DR}{DC}\ , \tag{2}$$

og efter (1) er $DF = 5 \cdot PF$ så

$$\frac{DP}{DF} = \frac{DF - PF}{DF} = \frac{5 \cdot PF - PF}{5 \cdot PF} = \frac{4}{5}\ . \tag{3}$$

Da ΔARD og ΔAPD har fælles grundlinje AD og $PR \parallel AD$, er

$$[APD] = [ARD]\ .$$

Da vi efter (2) og (3) har, at

$$\frac{DR}{DC} = \frac{4}{5}\ ,$$

gælder for ΔARC og ΔABC, at

$$[APD] = [ARD] = \tfrac{4}{5}[ADC] = \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{1}{2}W = \tfrac{4}{10}W\ .$$

III. Vi har, at

$$[BPC] = \tfrac{1}{10}W \quad \text{så} \quad [CPE] = \tfrac{1}{20}W\ ,$$

og da $[DFC] = \tfrac{1}{4}W$, er

$$[DPC] = [DFC] - [CPF] = \tfrac{1}{4}W - \tfrac{1}{20}W = \tfrac{2}{10}W\ .$$

IV. Til sidst er

$$[APB] = W - [APD] - [BPC] - [DPC] = W - \tfrac{4}{10}W - \tfrac{1}{10}W - \tfrac{2}{10}W = \tfrac{3}{10}W\ .$$

Dermed er det ønskede vist.

2. metode.

Vi bruger vektorregning.

Vi sætter

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

og

$$K = [ABCD] = \left|\det(\vec{u},\vec{v})\right|$$

Vi beviser, at

$$[\Delta BCP] = \tfrac{1}{10}K \quad , \quad [\Delta CDP] = \tfrac{1}{5}K \quad , \quad [\Delta ABP] = \tfrac{3}{10}K \quad , \quad [\Delta ADP] = \tfrac{2}{5}K \quad .$$

Først fastlægges vektorerne $\overrightarrow{DP}$ og $\overrightarrow{PC}$ som linearkombinationer af $\vec{u}$ og $\vec{v}$.
Vi har, at

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} = \vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} = \tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} \ .$$

Da $\overrightarrow{DF} \parallel \overrightarrow{DP}$ findes et tal *s*, så

$$\overrightarrow{DP} = s \cdot \overrightarrow{DF} = s \cdot \left(\vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v}\right) \ ,$$

og da $\overrightarrow{EC} \parallel \overrightarrow{PC}$ findes et tal *t*, så

$$\overrightarrow{PC} = t \cdot \overrightarrow{EC} = t \cdot \left(\tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}\right) \ .$$

Vi indsætter det fundne i ligningen

$$\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{DC} \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot \left(\vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v}\right) + t \cdot \left(\tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}\right) = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \quad s + \tfrac{1}{2}t \ \wedge \ t - \tfrac{1}{2}s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (s,t) = \left(\tfrac{4}{5}, \tfrac{2}{5}\right) \ .$$

Dermed er de ønskede linearkombinationer fundet:

$$\overrightarrow{DP} = \tfrac{4}{5}\left(\vec{u} - \tfrac{1}{2}\vec{v}\right) = \tfrac{4}{5}\vec{u} - \tfrac{2}{5}\vec{v} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{PC} = \tfrac{2}{5}\left(\tfrac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}\right) = \tfrac{1}{5}\vec{u} + \tfrac{2}{5}\vec{v} \ .$$

Nu kan vi beregne de relevante arealer:

$$[\Delta BCP] = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{PC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\vec{v}, \tfrac{1}{5}\vec{u} + \tfrac{2}{5}\vec{v}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{1}{5}\det\left(\vec{v},\vec{u}\right) + \tfrac{2}{5}\det\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right|$$

$$= = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{1}{5}\det\left(\vec{v},\vec{u}\right) + 0\right| = \tfrac{1}{10}\left|\det\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right| = \tfrac{1}{10}K \ .$$

$$[\Delta CDP] = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PC}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\vec{u}, \tfrac{1}{5}\vec{u} + \tfrac{2}{5}\vec{v}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{1}{5}\det\left(\vec{u},\vec{u}\right) + \tfrac{2}{5}\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right|$$

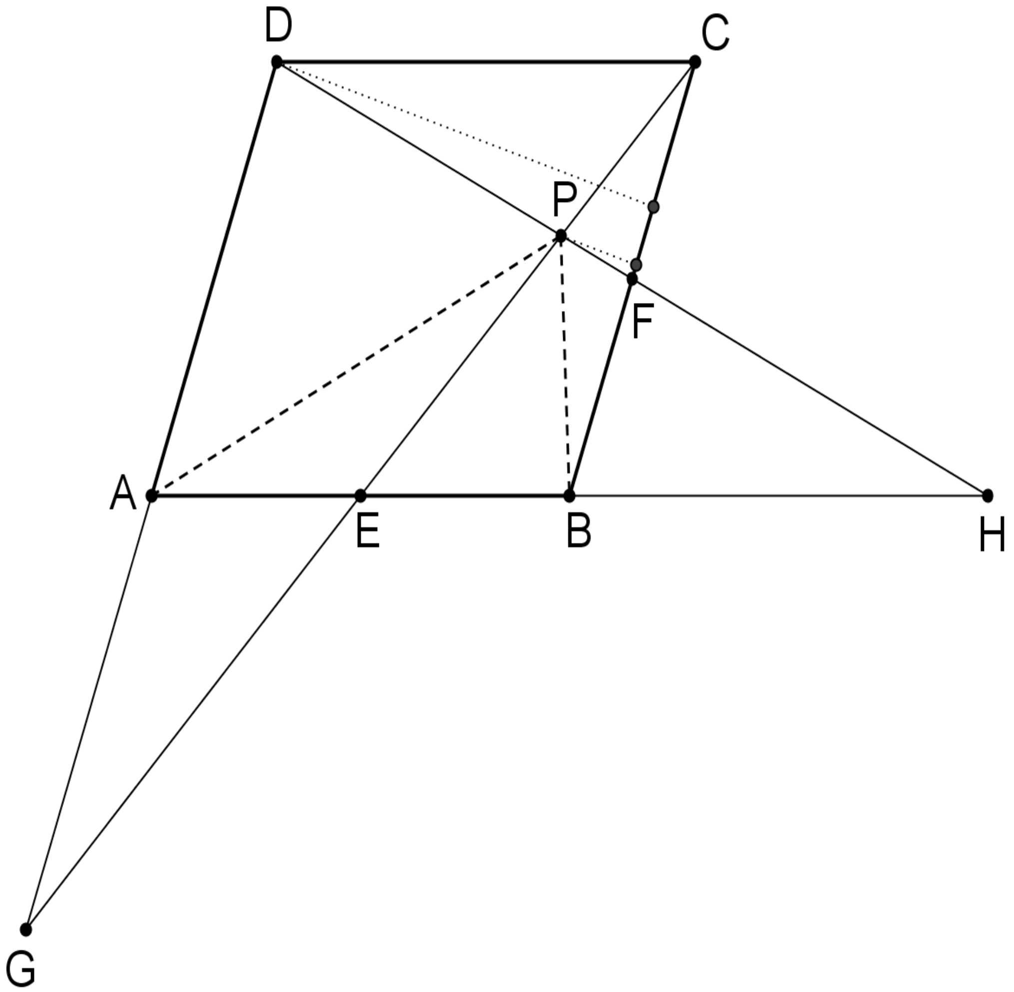
$$= = \tfrac{1}{2}\left|0 + \tfrac{2}{5}\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \tfrac{1}{5}\left|\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)\right| = \tfrac{1}{5}K \ .$$

$$[\Delta ADP] = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DP}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\det\left(\vec{v}, \tfrac{4}{5}\vec{u} - \tfrac{2}{5}\vec{v}\right)\right| = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{4}{5}\det\left(\vec{v},\vec{u}\right) - \tfrac{2}{5}\det\left(\vec{v},\vec{v}\right)\right|$$

$$= = \tfrac{1}{2}\left|\tfrac{4}{5}\det\left(\vec{v},\vec{u}\right) - 0\right| = \tfrac{2}{5}\left|\det\left(\vec{v},\vec{u}\right)\right| = \tfrac{2}{5}K \ .$$

Endelig er

$$[\Delta ABP] = K - \left(\tfrac{1}{10}K + \tfrac{1}{5}K + \tfrac{2}{5}K\right) = \tfrac{3}{10}K \ .$$



3. metode.

Linjen DF skærer AB i H og CE skærer DA i G. Vi har, at ΔHPE og ΔDPC er ensvinklede. Desuden er ΔHFB og ΔHDA ensvinklede og da $BF = \frac{1}{2}AD$, er

$BH = \frac{1}{2}AH$, så $AB = BH$. Da E er midtpunkt af AB, er så

$$EH = \tfrac{3}{2}AB = \tfrac{3}{2}CD\,.$$

Derfor er siderne i ΔHPE $\frac{3}{2}$ gange så store som siderne i ΔDPC, og derfor gælder for arealerne

$$[HPE] = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot [DPC]\,.$$

Vi har, at

$$EH = \tfrac{3}{2}AB \quad \Leftrightarrow \quad AB = \tfrac{2}{3}EH\;,$$

og da ΔAPB og ΔHPE har samme højde, gælder for arealerne, at

$$[APB] = \tfrac{2}{3}[HPE] = \tfrac{2}{3}\cdot\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \cdot [DPC] = \tfrac{3}{2}\cdot[DPC]\,.$$

Videre er ΔCBE og ΔGAE ensvinklede, og da desuden $BE = EA$, er de kongruente. Altså er $AG = CB = AD$.

ΔPCF er ensvinklet med ΔPGD og da

$$DG = 2 \cdot AD = 2 \cdot BC = 4 \cdot CF \ ,$$

er størrelsesforholdet mellem ΔPGD og ΔPCF som 4:1 og dermed

$$[PGD] = 16 \cdot [PCF] \ . \tag{1}$$

Da A er midtpunkt af DG og F midtpunkt af BC, er

$$[PDA] = \tfrac{1}{2} \cdot [PGD] \quad \text{og} \quad [PCB] = 2 \cdot [PCF] \ .$$

Dette giver sammen med (1), at

$$[PCB] = 2 \cdot [PCF] = \tfrac{1}{8} \cdot [PGD] = \tfrac{1}{4} \cdot [PDA] \ .$$

Da $[PDA] = 4 \cdot [PCB]$, er højden fra P i ΔPDA 4 gange så lang som højden fra P i ΔPCB, fordi de to trekanter har lige lange grundlinjer AD og BC. Heraf følger, at højden fra D i ΔCDF er 5 gange så lang som højden fra P i ΔCPF. Da begge trekanter har sam- me grundlinje CF, er

$$[PDC] = 5 \cdot [CPF] \quad \text{så} \quad [PDC] = 4 \cdot [CPF] \ .$$

Da F er midtpunkt af BC, er

$$[PDC] = 2 \cdot [CPB]. \ .$$

Ialt har vi nu fundet, at

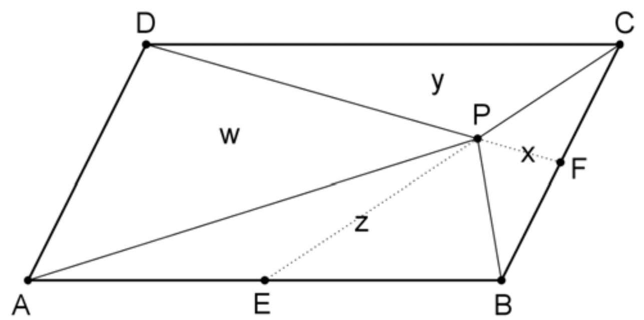
$$[PDC] = 2 \cdot [CPB]$$
$$[PAB] = \tfrac{3}{2} \cdot [PCD] = 3 \cdot [CPB]$$
$$[PDA] = 4 \cdot [PCB] \ .$$

Dette betyder, at arealerne af de 4 trekanter forholder sig som 1 : 2 : 3 : 4.

4. metode.

Lad trekanterne BCP, CDP, ABP og DAP have arealerne x, y, z og w som vist på figuren. Vi vil vise, at $x : y : z : w = 1 : 2 : 3 : 4$

Da $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, sætter vi for at få nemme udregninger arealet af parallelogram- met $ABCD$ lig med $10p$, hvor $p > 0$.



Da linjestykkerne *AB* og *CD* er lige lange og parallelle, og da deres indbyrdes afstand, som jo er den tilsvarende højde i parallelogrammet, er lig med summen af højderne i ΔCDP og ΔABP, er $y + z = 5p$ og på analog måde er $x + w = 5p$.

Parallelogrammet kan deles i fire trekanter kongruente med ΔEBC, som igen kan deles i ΔBCP og det halve af ΔABP, og derfor er $x+\frac{1}{2}z=\frac{5}{2}p$, og på analog måde ses det, at $\frac{1}{2}x+y=\frac{5}{2}p$.

Vi har nu ligningssystemet

$$\begin{array}{llll} & y & +z & & = 5p \\ x & & & +w & = 5p \\ 2x & & +z & & = 5p \\ x & +2y & & & = 5p\ . \end{array}$$

Det ses umiddelbart, at

$$(x,y,z,w) = (p,2p,3p,4p)$$

er en løsning til ligningssystemet og hvis dets determinant *D* er forskellig fra 0, er det også den eneste. Vi findet

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=5\ .$$

Heraf følger, at (2) er den eneste løsning til ligningssystemet.

5. metode.

Et vilkårligt parallelogram kan ved en lige affinitet (med en af parallelgram- siderne, fx AB, som ekse) forvandles til et rektangel, og dette kan ved en ret affinitet (med samme parallelogramside som akse og et passende forvandlingstal) forvandles til et kvadrat.

Da begge affiniteter bevarer forhold mellem arealer, og da det er velkendt, at påstan- den i opgaven gælder for ethvert kvadrat (hvor de to linjestykker CE og DF jo står vin- kelret på hinanden, og trekanterne BCE og DF er kongruente), så gælder den også for ethvert parallelogram.