Svar på opgave 271 (August 2010)

Opgave:

For to positive tal a og b er det harmoniske, geometriske, aritmetiske og kvadratiske middeltal givet ved

$$H=\frac{2ab}{a+b}\quad,\quad G=\sqrt{ab}\quad,\quad A=\frac{a+b}{2}\quad,\quad K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\quad.$$

Det er kendt, at $H < G < A < K$. Ordn intervallerne $[H;G]$, $[G;A]$, $[A;K]$
efter voksende længde.

Besvarelse:

Vi kan forudsætte, at $0 < a < b$. Det harmoniske, geometriske, aritmetiske og kvadrati- ske middeltal af a og b er

$$H=\frac{2ab}{a+b}\ ,\ G=\sqrt{ab}\ ,\ A=\frac{a+b}{2}\ ,\ K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\quad.$$

Intervallerne $[H;G]$, $[G;A]$, $[A;K]$ skal ordnes efter størrelse, dvs. vi skal se på tallene

$$G-H\ ,\ K-A\ ,\ A-G\ . \tag{1}$$

***1. metode*:**

Vi har, at

$$A\cdot H=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2\ .$$

I. Det kvadratiske middeltal af G og K er A, fordi

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}}=\sqrt{\frac{ab+\frac{1}{2}(a^2+b^2)}{2}}=\sqrt{\frac{2ab+a^2+b^2}{4}}=\sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}}=\frac{a+b}{2}=A\ . \tag{2}$$

Det kvadratiske middeltal for to tal er større end det aritmetiske, så

$$\sqrt{\frac{G^2+K^2}{2}}>\frac{G+K}{2}\quad\Leftrightarrow\quad A>\frac{G+K}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 2A>G+K\quad\Leftrightarrow\quad A-G>K-A\ . \tag{3}$$

Dette fastlægger længderne af de to sidste intervaller i (1).

II. Af (2) får vi

$$K^2+G^2=2A^2$$

så

$$K^2 - G^2 = 2A^2 - 2G^2 = 2A^2 - 2A \cdot H = 2A(A - H)\ .\ .$$

Af (3) får vi ved multiplikation af $K - G$:

$$2A > K + G \iff 2A(K - G) > K^2 - G^2 \iff 2A(K - G) > 2A(A - H)$$

$$\iff K - G > A - H \iff G - H < K - A\ .$$

Dermed er de to første intervaller i (1) sammenlignet.

Ialt har vi fundet, at

$$G - H < K - A < A - G\ .$$

***2. metode*:**

Vi viser, at

$$K + G \le 2A$$

idet dette er ensbetydende med, at $K - A \le A - G$.

Vi anvender Cauchy-Schwarz ulighed på vektorerne

$$(1,1) \quad \text{og} \quad \left(\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}, \sqrt{ab}\right)$$

og får

$$1 \cdot \sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}} + 1 \cdot \sqrt{ab} \le \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\sqrt{\tfrac{a^2+b^2}{2}}^2 + \sqrt{ab}^2}$$

$$\iff K + G \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + ab} \iff K + G \le \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{2}}$$

$$\iff K + G \le |a+b| = a + b = 2A\ .$$

Dernæst viser vi, at $G - H \le K - A$. Vi får, idet vi forudsætter $a \ne b$:

$$\sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \frac{a+b}{2} \iff \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}$$

$$\iff \left(\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right) \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right)$$

$$\iff \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right) \le \frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{a^2+b^2-2ab}{2}$$

$$\iff \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \cdot \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}\right) \le \frac{(a-b)^2}{2}$$

$$\iff \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \le a + b \iff K + G \le 2A\ .$$

hvilket er sandt efter ovenstående.

Man kan foretage følgende regning, der beviser denne ulighed:

$$G - H \le K - A \iff A - H \le K - G\ ,$$

og

$$A - H = \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{2(a+b)} = \frac{(a-b)^2}{4A} \quad ,$$

$$K - G = \frac{2(K^2 - G^2)}{2(K+G)} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2(K+G)} = \frac{(a-b)^2}{2(K+G)} \geq \frac{(a-b)^2}{4A} = A - H \ .$$

hvor vi i den sidste ulighed har brugt, at $K + G \leq 2A$.

Se iøvrigt artiklen *Middeltal endnu en gang* i *MatematikMagasinet* 51, s. 1594.