Svar på opgave 272 (September 2010)

Opgave:

Vis, at

$$\cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}=5\ .$$

Besvarelse:

1. metode.
Betragt ligningen

$$\sin 7x = 0\ .$$

Heri er tallene

$$\frac{\pi}{7}\ ,\ \frac{2\pi}{7}\ \text{ og }\ \frac{3\pi}{7}$$

løsninger. Vi har, at

$$\sin 7x = 7\sin x\cdot\cos^6 x - 35\sin^3 x\cdot\cos^4 x + 32\sin^5 x\cdot\cos^2 x - \sin^7 x$$
$$\Leftrightarrow\quad \sin^7 x\cdot(7\cot^6 x - 35\cot^4 x + 21\mathrm{ot}^2 x - 1)\ .$$

Sæt nu

$$x=\frac{k\pi}{7}\quad ,\quad k = 1, 2, 3\ .$$

Da $\sin^7 x \neq 0$ gælder

$$\sin 7x = 0 \quad\Leftrightarrow\quad 7\cot^6 x - 35\cot^4 x + 21\mathrm{ot}^2 x - 1 = 0\ , \tag{1}$$

og sættes $y = \cot^2 x$, får vi

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0\ . \tag{2}$$

Rødderne i denne ligning er efter (1)

$$y_1=\cot^2\frac{\pi}{7}\quad ,\quad y_2=\cot^2\frac{2\pi}{7}\quad ,\quad y_3=\cot^2\frac{3\pi}{7}\quad .$$

Nu er (2) ensbetydende med

$$7(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = 0\ .$$

og i denne ligning er andengradsleddet

$$-7y^2(y_1 + y_2 + y_3)\ ,$$

så vi ved sammenligning med det tilsvarende led i (2) får at

$$-7(y_1 + y_2 + y_3) = -35 \quad\Leftrightarrow\quad \cot^2\frac{\pi}{7}+\cot^2\frac{2\pi}{7}+\cot^2\frac{3\pi}{7}=5\quad .$$

I virkeligheden er formlen et specialtilfælde af den mere generelle formel

$$\cot^2\frac{\pi}{2n+1}+\cot^2\frac{2\pi}{2n+1}+\cdots+\cot^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}\quad .$$

For n = 3 får vi den viste formel, mens n = 4 og n = 5 giver følgende trigonometriske monstrer:

$$\cot^2\frac{\pi}{9}+\cot^2\frac{2\pi}{9}+\cot^2\frac{3\pi}{9}+\cot^2\frac{4\pi}{9}=\frac{28}{3}\ .$$

$$\cot^2\frac{\pi}{11}+\cot^2\frac{2\pi}{11}+\cot^2\frac{3\pi}{11}+\cot^2\frac{4\pi}{11}+\cot^2\frac{5\pi}{11}=15\ .$$

2. metode.
Vi foretager en trigonometrisk *tour de force* og benytter formlerne

$$\tan^2 x=\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}\quad,\quad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\quad,\quad \cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1\ . \qquad (3)$$

Vi sætter $v=\frac{\pi}{7}$ og idet $\cos\frac{6\pi}{7}=-\cos\frac{\pi}{7}$, får vi

$$\cot^2 v=\frac{\cos^2 v}{\sin^2 v}=\frac{\cos^2 v}{1-\cos^2 v}\quad,\quad \cot^2 3v=\frac{1+\cos 6v}{1-\cos 6v}=\frac{1-\cos v}{1+\cos v}$$

$$\cot^2 2v=\frac{1-\cos 4v}{1-\cos 4v}=\frac{8\cos^4 v-8\cos^2 v+2}{-8\cos^4 v+8\cos^2 v}=\frac{1+4\cos^4 v-4\cos^2 v}{4\cos^2 v(1-\cos^2 v)}\ .$$

Dermed er

$$\cot^2 v+\cot^2 2v+\cot^2 3v=\frac{\cos^2 v}{1-\cos^2 v}+\frac{(1-\cos v)^2}{1-\cos^2 v}+\frac{1+4\cos^4 v-4\cos^2 v}{4\cos^2 v(1-\cos^2 v)}$$

$$=\frac{4\cos^4 v+4\cos^2 v(1+\cos^2 v-2\cos v)+1+4\cos^4 v-4\cos^2 v}{4\cos^2 v(1-\cos^2 v)}=\frac{12\cos^4 v-8\cos^3 v}{4\cos^2 v\ (1-\cos^2 v)}\ .$$

Vi skal vise, at

$$\frac{12\cos^4 v-8\cos^3 v}{4\cos^2 v\ (1-\cos^2 v)}=5$$

eller at

$$32\cos^4 v-8\cos^3 v-20\cos^2 v+1=0\ . \qquad (4)$$

Efter (3) er

$$32\cos^4 v=4\cos 4v+32\cos^2 v-4\quad \text{og}\quad 8\cos^3 v=2\cos 3v+6\cos v\ ,$$

og idet $2\cos^2 v = 1+\cos 2v$, er (4) ensbetydende med

$$4\cos 4v+32\cos^2 v-4-2\cos 3v-6\cos v-20\cos^2 v+1=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\cos 4v-2\cos 3v+12\cos^2 v-6\cos v-3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\cos 4v-2\cos 3v+6+6\cos 2v-6\cos v-3=0$$

$$\Leftrightarrow\quad 4\cos 4v-2\cos 3v+6\cos 2v-6\cos v+3=0\ . \qquad (5)$$

Nu er

$$\cos 4v=\cos\frac{4\pi}{7}=-\cos\frac{3\pi}{7}=-\cos 3v\ ,$$

så (5) er ensbetydende med

$$-6\cos 3v+6\cos 2v-6\cos v+3=0\quad\Leftrightarrow\quad 3-6(\cos 3v-\cos 2v+\cos v)=0$$

$$\Leftrightarrow\quad \cos 3v-\cos 2v+\cos v=\frac{1}{2}\ , \qquad (6)$$

og det er dette, vi skal vise.
Da $\cos 2v = -\cos 5v$, kan vi omforme (6) således:

$$\cos v+\cos 3v+\cos 5v=\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad 2\sin v\cos v+2\sin v\cos 3v+2\sin v\cos 5v=\sin v\ . \qquad (7)$$

Vi benytter nu, at

$$2\sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

så (7) er ensbetydende med

$$\sin 2v + \sin 4v + \sin(-2v) + \sin 6v + \sin(-4v) = \sin v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2v + \sin 4v - \sin 2v + \sin 6v - \sin 4v = \sin v$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 6v = \sin v \Leftrightarrow \sin\tfrac{6\pi}{7} = \sin\tfrac{\pi}{7}$$

hvilket er sandt.

3. metode.
Vi benytter følgende formler for cotangens:

$$\cot 2v = \frac{\cot^2 v - 1}{2\cot v} \quad \text{og} \quad \cot 3v = \frac{\cot^3 v - 3\cot v}{3\cot^2 v - 1} \quad . \tag{8}$$

Af (8) fås

$$\cot 4v = \frac{\cot^2 2v - 1}{2\cot 2v} = \frac{\cot^4 v - 6\cot^2 v + 1}{4\cot v(\cot 2v - 1)} \quad . \tag{9}$$

Lad nu $v = \frac{k\pi}{7}$, hvor k = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Heraf fås, at

$$7v = k\pi \quad \text{så} \quad 4v = k\pi - 3v$$

Da cot($k\pi$ - x) = cot$x$ for alle hele tal k, gælder

$$\cot 4v = -\cot 3v \quad \text{for} \quad v = \tfrac{k\pi}{7} \quad , \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ .$$

Kombineres dette med (8) og (9) fås:

$$\frac{\cot^4 v - 6\cot^2 v + 1}{4\cot v(\cot^2 v - 1)} = \frac{\cot^3 v - 3\cot v}{3\cot^2 v - 1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7(\cot^2 v)^3 - 35(\cot^2 v)^2 + 21\cot^2 v - 1 = 0 \quad \text{for} \quad v = \tfrac{k\pi}{7} \quad , \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ . \tag{10}$$

Da

$$\cot(\pi - x) = -\cot x \quad \text{og dermed} \quad \cot^2(\pi - x) = \cot^2 x \ ,$$

gælder

$$\cot^2\tfrac{\pi}{7} = \cot^2\tfrac{6\pi}{7} \quad , \quad \cot^2\tfrac{2\pi}{7} = \cot^2\tfrac{5\pi}{7} \quad \text{og} \quad \cot^2\tfrac{3\pi}{7} = \cot^2\tfrac{4\pi}{7} \ .$$

Vi har altså efter (10), at polynomiet

$$P(x) = 7x^3 - 35x^2 + 21x - 1$$

har de tre (forskellige) rødder $\cot^2\frac{\pi}{7}, \cot^2\frac{2\pi}{7}$ og $\cot^2\frac{3\pi}{7}$. Efter Vietas formler fdor sammenhængen mellem rødder og koefficienter i polynomier, er summen af de tre rødder i dette tilfælde $-\frac{-35}{7} = 5$.

Vi får desuden at rødderns produkt er

$$\cot^2\tfrac{\pi}{7}, \cot^2\tfrac{2\pi}{7} \text{ og } \cot^2\tfrac{3\pi}{7} \quad \text{eller} \quad \tan^2\tfrac{\pi}{7}\cdot\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\cdot\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7 \quad .$$

4. metode.
Vi sætter

$$a = \sin\tfrac{\pi}{7} \ , \ b = \sin\tfrac{2\pi}{7} \ , \ c = \sin\tfrac{3\pi}{7} \ .$$

Idet

$$\cot^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$$

er

$$\cot^2 \tfrac{\pi}{7} + \cot^2 \tfrac{2\pi}{7} + \cot^2 \tfrac{3\pi}{7} = \frac{1-a^2}{a^2} + \frac{1+b^2}{b^2} + \frac{1-c^2}{c^2}$$

$$= \frac{(1-a^2)b^2c^2 + (1-b^2)a^2c^2 + (1-c^2)a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2) - 3a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} \quad . \tag{11}$$

Ved brug af additionsformlerne (eller ved at bruge en trigonometrisk formelsamling) finder vi, at

$$\sin 7x = -64\sin^7 x + 112\sin^5 x - 56\sin^3 x + 7\sin x \quad . \tag{12}$$

Ligningen

$$\sin 7x = 0$$

har (blandt flere) de 7 løsninger

$$0 \,,\ \pm\tfrac{\pi}{7} \,,\ \pm\tfrac{2\pi}{7} \,,\ \pm\tfrac{3\pi}{7} \quad .$$

Dette medfører efter formlen (12), at ligningen

$$-64t^7 + 112t^5 - 56t^3 + 7t = 0$$

har de 7 (forskellige!) løsninger

$$0 \quad , \quad \pm\sin\tfrac{\pi}{7} = \pm a \quad , \quad \pm\sin\tfrac{2\pi}{7} = \pm b \quad , \quad \pm\sin\tfrac{3\pi}{7} = \pm c \quad .$$

Nu er

$$-64t^7 + 112t^5 - 56t^3 + 7t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^7 - \tfrac{112}{64}t^5 + \tfrac{56}{64}t^3 - \tfrac{7}{64}t = 0 \quad ,$$

så vi kan foretage følgende faktoropløsning:

$$t^7 - \tfrac{112}{64}t^5 + \tfrac{56}{64}t^3 - \tfrac{7}{64}t = t(t-a)(t+a)(t-b)(t+b)(t-c)(t+c) \ .$$

Parenteserne på højre side ganges ud:

$$t^7 - \tfrac{112}{64}t^5 + \tfrac{56}{64}t^3 - \tfrac{7}{64}t = t^7 - (a^2 + b^2 + c^2)\, t^5 + (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)\, t^3 - a^2b^2c^2\, t \quad .$$

Dermed er

$$a^2b^2c^2 = \tfrac{7}{64} \ \ og \ \ b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = \tfrac{56}{64}.$$

Disse værdier indsættes i (11):

$$\cot^2 \tfrac{\pi}{7} + \cot^2 \tfrac{2\pi}{7} + \cot^2 \tfrac{3\pi}{7} \ = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} - 3 = \frac{\frac{56}{64}}{\frac{7}{64}} - 3 = 8 - 3 = 5 \ .$$