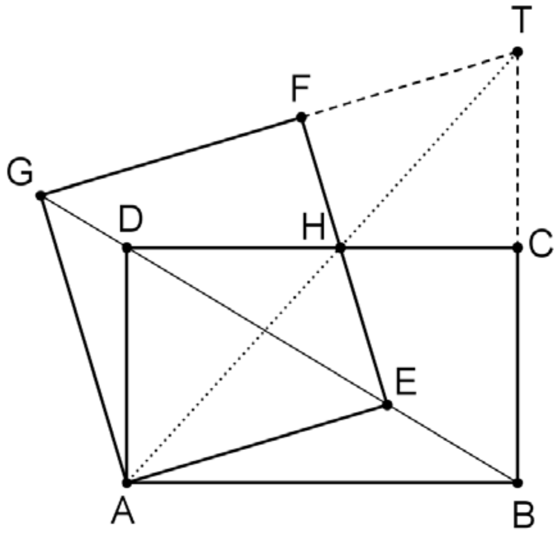
# Svar på opgave 274 (November 2010)

## *Opgave:*

To rektangler *ABCD* og *AEFG* har vinkelspidsen *A* fælles og desuden ligger deres diagonaler *BD* og *EG* på samme rette linje. Siderne *CD* og *EF* skærer hinanden i *H* og siderne *BC* og *GF* skærer hinanden i *T*.
Vis, at punkterne *T*, *H* og *A* ligger på linje.




## *Besvarelse:*

Vi har, at $\square FHCT$ er indskrivelig, så $\angle FTC = 180° - \angle FHC = 180° - \angle DHE$ ,
og da $\square DHEA$ er indskrivelig, er

$$180° - \angle DHE = \angle DAE \; ,$$

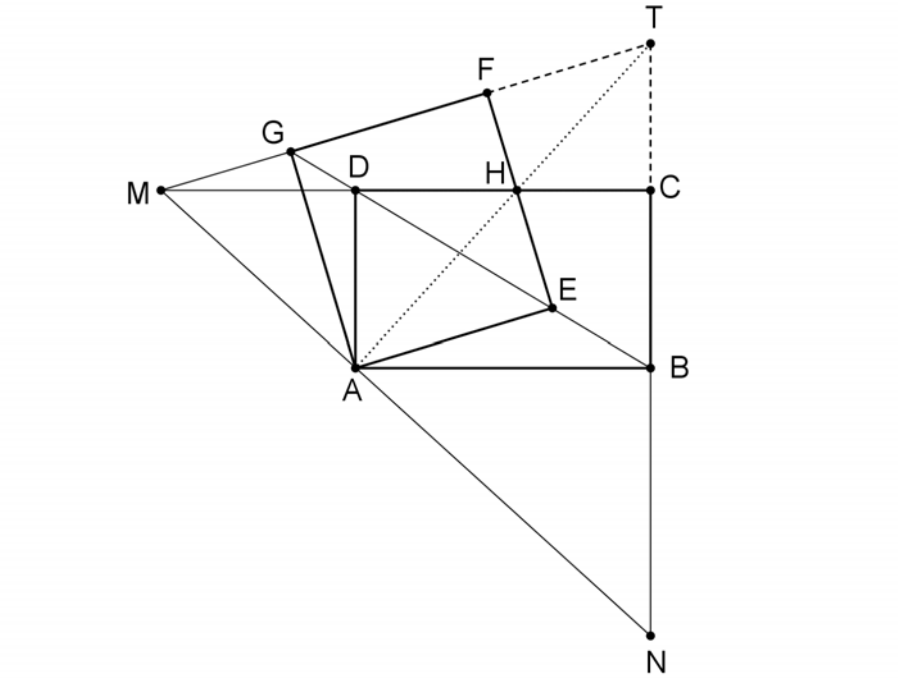
så at

$$\angle FTC = \angle DAE \; .$$

Desuden er

$$\angle DAH = \angle DEH \; ,$$

fordi de spænder over samme bue i den omskrevne cirkel for $\square DHEA$.




Lad nu $CD$ og $FG$ skære hinanden i $M$, og $BC$ og $EF$ skære hinanden i $N$. Så er

$$\angle DMG = \angle DAG \ ,$$

fordi deres vinkelben er indbyrdes vinkelrette. Men dette medfører, at $\square ADGM$ er indskrivelig.

Så er

$$\angle DAM = 180° - \angle MGD = \angle FGE \ ,$$

og dermed

$$\angle MAH = \angle DAM + \angle DAH = \angle FGE + \angle DEH = 90° ,$$

hvor vi til sidst har brugt $\Delta GEF$. På samme måde har $\angle EAB$ og $\angle ENB$ ortogonale ben, så $\angle EAB = \angle ENB$. Dette giver, at $\square AEBN$ er indskrivelig, så

$$\angle EAN = 180° - \angle EBN \ .$$

Desuden er

$$\angle HAE = \angle HDE = 90° - \angle CBD \ .$$

Altså er

$$\angle NAH = \angle HAE + \angle EAN = 90° - \angle CBD + 180° - \angle EBN$$

$$= 270° - \angle CBD - (180° - \angle CBE) = 90° - \angle CBD + \angle CBE = 90° \ .$$

Dermed er

$$\angle MAH = \angle NAH = 90° \ ,$$

så $M$, $A$ og $N$ ligger på linje.

I $\Delta TMN$ er $NF \perp TM$ og $TA \perp MN$, så $H$ er højdernes skæringspunkt. Dermed ligger $T$, $H$ og $A$ på trekantens højde fra $T$.