Svar på opgave 276 (Januar 2011)

Opgave:

Vis, at der for positive tal a, b og c gælder

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}$$

Besvarelse:

1. metode

Vi viser først den i sig selv interessante ulighed

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c \ . \tag{1}$$

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\frac{a^2}{b}+b \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{b}\cdot b}=2a \quad , \quad \frac{b^2}{c}+c \geq 2\sqrt{\frac{b^2}{c}\cdot c}=2b \quad , \quad \frac{c^2}{a}+a \geq 2\sqrt{\frac{c^2}{a}\cdot a}=2c \quad ,$$

hvoraf ved addition

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \geq 2(a+b+c) \ ,$$

som er ensbetydende med (1).
Nu gælder på grund af uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal

$$\frac{a^3}{b^2}+a \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b^2}\cdot a}=2\cdot\frac{a^2}{b} \quad , \quad \frac{b^3}{c^2}+b \geq 2\cdot\frac{b^2}{c} \quad , \quad \frac{c^3}{a^2}+c \geq 2\cdot\frac{c^2}{a} \quad .$$

Ved addition fås

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+a+b+c \geq 2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)$$

$$=\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ .$$

Her fås det sidste ulighedstegn af (1). Altså har vi nu

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}+a+b+c \geq \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \ ,$$

hvilket er ensbetydende med det ønskede.

2. metode

Vi bemærker først, at der for positive tal x og y gælder, at

$$x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \quad ,$$

fordi ved at benytte, at $x^2 + y^2 \geq 2xy$ får, at

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x+y)(2xy - xy) = xy(x+y) \quad .$$

Nu får vi ved anvendelse heraf, at

$$\frac{a^3}{b^2} + b = \frac{a^3 + b^3}{b^2} \geq \frac{ab(a+b)}{b^2} = \frac{a^2}{b} + a \quad , \tag{2}$$

og tilsvarende

$$\frac{b^3}{c^2} + c \geq \frac{b^2}{c} + b \quad \text{og} \quad \frac{c^3}{a^2} + a \geq \frac{c^2}{a} + c \quad .$$

Addition giver

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + a + b + c \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \quad ,$$

hvilket er ensbetydende med det ønskede.

Man kunne i øvrigt have opnået uligheden (2) således:

$$a^3 + b^3 \geq ab(a+b) \quad \Leftrightarrow \quad a^3 + b^3 \geq a^2 b + ab^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^3 + b^3}{b^2} \geq \frac{a^2 b + ab^2}{b^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^3}{b^2} + b \geq \frac{a^2}{b} + a \quad .$$

3. metode

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middel-tal giver

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{a^3}{b^2} + b \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^3}{b^2} \cdot \frac{a^3}{b^2} \cdot b} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot \frac{a^3}{b^2} + b \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^2 \cdot b} = 3 \cdot \frac{a^2}{b}$$

og tilsvarende

$$2 \cdot \frac{b^3}{c^2} + c \geq 3 \cdot \frac{b^2}{c} \quad \text{og} \quad 2 \cdot \frac{c^3}{a^2} + a \geq 3 \cdot \frac{c^2}{a} \quad .$$

Addition af de tre uligheder giver

$$2 \cdot \frac{a^3}{b^2} + 2 \cdot \frac{b^3}{c^2} + 2 \cdot \frac{c^3}{a^2} + a + b + c \geq 3 \cdot \frac{a^2}{b} + 3 \cdot \frac{b^2}{c} + 3 \cdot \frac{c^2}{a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - (a+b+c)\right)$$

Her er den sidste parentes på højre side positiv efter (1), så

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2}\right) \geq 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \quad ,$$

hvilket er ensbetydende med det ønskede.

4. metode
Vi anvender Cauchy-Schwarz' ulighed

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

hvor vi sætter

$$(a_1,a_2,a_3) = \left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}\right) \quad \text{og} \quad (b_1,b_2,b_3) = \left(\frac{a\sqrt{a}}{b}, \frac{b\sqrt{b}}{c}, \frac{c\sqrt{c}}{a}\right),$$

så vi får

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 \le \left(a+b+c\right)\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right) \le \left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right),$$

Her har vi ved det sidste ulighedstegn benyttet (1). Ved division på begge sider fås det ønskede.

5. metode
Den måske korteste version er udelukkende baseret på uligheden $(x - y)^2 \ge 0$. Vi får, at

$$\left(\frac{a\sqrt{a}}{b}-\sqrt{a}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{b}}{c}-\sqrt{b}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{c}}{a}-\sqrt{c}\right)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^3}{b^2}-\frac{2a^2}{b}+a\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}-\frac{2b^2}{c}+b\right)+\left(\frac{c^3}{a^2}-\frac{2c^2}{a}+c\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \ge 2\cdot\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)-\left(a+b+c\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2} \ge \frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-\left(a+b+c\right)\right)$$

Her er den sidste parentes på højre side positiv efter (1) og heraf følger den ønskede ulighed.

6. metode
Vi benytter Jensens ulighed, idet der for en konveks funktion f gælder

$$f(k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3) \le k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + k_3 f(x_3) \quad \text{hvor} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1 .$$

Vi benytter $f(x) = x^2$, som er konveks og benytter

$$k_1 = \frac{a}{a+b+c}, \quad k_2 = \frac{b}{a+b+c}, \quad k_3 = \frac{c}{a+b+c}, \quad x_1 = \frac{a}{b}, \quad x_2 = \frac{b}{c}, \quad x_3 = \frac{c}{a},$$

så vi får

$$\left(\frac{a}{a+b+c}\cdot\frac{a}{b}+\frac{b}{a+b+c}\cdot\frac{b}{c}+\frac{c}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a}\right)^2 \le \frac{a}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{b}{a+b+c}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2+\frac{c}{a+b+c}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(a+b+c)^2}\cdot\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)^2 \le \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a+b+c}\cdot\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right) \le \left(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\right).$$

Den ønskede ulighed følger, hvis vi kan vise, at

$$\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\cdot\frac{1}{a+b+c}\geq 1 \quad ,$$

og dette følger af (1) ved division med $a + b + c$.

7. metode

Uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal giver

$$\frac{1}{19}\left(14\cdot\frac{a^3}{b^2}+3\cdot\frac{b^3}{c^2}+2\cdot\frac{c^3}{a^2}\right)\geq\sqrt[19]{\left(\frac{a^3}{b^2}\right)^{14}\cdot\left(\frac{b^3}{c^2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{c^3}{a^2}\right)^{2}}=\frac{a^2}{b} \; .$$

Tilsvarende er

$$\frac{1}{19}\left(2\cdot\frac{a^3}{b^2}+14\cdot\frac{b^3}{c^2}+3\cdot\frac{c^3}{a^2}\right)\geq\frac{b^2}{c} \qquad \text{og} \qquad \frac{1}{19}\left(3\cdot\frac{a^3}{b^2}+2\cdot\frac{b^3}{c^2}+14\cdot\frac{c^3}{a^2}\right)\geq\frac{c^2}{a} \; .$$

Addition af de tre uligheder giver

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \quad ,$$

8. metode

Vi omskriver sådan:

$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \iff \left(\frac{a^3}{b^2}-\frac{a^2}{b}\right)+\left(\frac{b^3}{c^2}-\frac{b^2}{c}\right)+\left(\frac{c^3}{a^2}-\frac{c^2}{a}\right)\geq 0$$

$$\iff (a-b)\cdot\frac{a^2}{b^2}+(b-c)\cdot\frac{b^2}{c^2}+(c-a)\cdot\frac{c^2}{a^2}\geq 0 \; .$$

Lad nu x være et vilkårligt af tallene a, b og c og lad y være et af de to øvrige.

Hvis $x \leq y$, er $x - y \leq 0$ og $\frac{x^2}{y^2}\leq 1$ og dermed

$$(x-y)\cdot\frac{x^2}{y^2}\geq x-y \; .$$

Hvis $x > y$, er $x - y > 0$ og $\frac{x^2}{y^2}>1$ og dermed

$$(x-y)\cdot\frac{x^2}{y^2}> x-y \; .$$

Altså er

$$(a-b)\cdot\frac{a^2}{b^2}+(b-c)\cdot\frac{b^2}{c^2}+(c-a)\cdot\frac{c^2}{a^2}\geq (a-b)+(b-c)+(c-a)=0 \; .$$

Dermed er uligheden bevist.