Svar på opgave 277 (Februar 2011)

Opgave:

Løs indenfor de hele tal ligningen

$$y^4 = 1 + x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

Besvarelse:

1. metode

Hvis x har en af værdierne 0, -1, -2 eller -3, er ligningen $y^4 = 1$ med løsningerne $y = \pm 1$. Men der kunne jo tænkes andre løsninger end disse oplagte.

Vi omskriver ligningen sådan:

$$y^4 = x(x + 3)\cdot(x + 2)(x + 1) + 1 \quad\Leftrightarrow\quad y^4 = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + 1$$

$$\Leftrightarrow\quad y^4 = (x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) + 1 \quad\Leftrightarrow\quad y^4 = (x^2 + 3x + 1)^2 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow\quad y^2 = x^2 + 3x + 1 \quad\vee\quad y^2 = -x^2 - 3x - 1 \quad .$$

Vi løser disse ligninger hver for sig som andengradsligninger i x.

I. $x^2 + 3x + 1 - y^2 = 0$.

Diskriminanten er

$$d = 9 - 4(1 - y^2) = 5 + 4y^2 \quad .$$

Her skal d være et kvadrattal, så der findes et tal k, så

$$5 + 4y^2 = k^2 \quad\Leftrightarrow\quad 4y^2 - k^2 = -5 \quad\Leftrightarrow\quad (2y - k)(2y + k) = -5 \quad .$$

Dette giver kombinationerne

$$\begin{array}{llll} 2y - k = 1 & 2y - k = -1 & 2y - k = 5 & 2y - k = -5 \\ 2y + k = -5 & 2y + k = 5 & 2y + k = -1 & 2y + k = 1 \quad . \end{array}$$

Addition i hvert af tilfældene giver, at $y = -1$ eller $y = 1$.

I begge tilfælde er $d = 9$, så vi løser

$$x^2 + 3x + 1 - 1 = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0 \quad\vee\quad x = -3 \quad .$$

Dermed har vi løsningerne

$$(x,y) \;:\; (0,1) , (0,-1) , (-3,1) , (-3,-1) \quad .$$

II. $x^2 + 3x + 1 + y^2 = 0$.

Diskriminanten er

$$d = 9 - 4(1 + y^2) = 5 - 4y^2 \quad .$$

Denne er et kvadrattal kun for $y = \pm 1$ og vi får ligningen

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2 \quad \vee \quad x = -1 \ .$$

Disse giver løsningerne

$$(x,y) \ : \quad (-2,-1) \ , (-2,1) \ , (-1,1) \ , (-1,-1) \ .$$

Ligningen har altså kun de oplagte 8 løsninger.

Bemærkning. Et lidt snedig omskrivning af (1) giver

$$(x^2 + 3x + 1 - y^2)(x^2 + 3x + 1 + y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (4x^2 + 12x + 4 - 4y^2)(4x^2 + 12x + 4 + 4y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad [(2x + 3)^2 - (2y)^2 - 5] \cdot [(2x + 3)^2 + (2y)^2 - 5] = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad [(2x + 3 + 2y)(2x + 3 - 2y) - 5] \cdot [(2x + 3)^2 + (2y)^2 - 5] = 0$$

Her er en af faktorerne 0 og vi får igen de 8 nævnte løsninger.

***2. metode* (Anders Crone, Kalundborg)**

Man ser umiddelbart, at $x = -3$, $x = -2$, $x = -1$ og $x = 0$ giver $y = \pm 1$. Eventuelle andre heltallige løsninger skal altså søges for $x < -3$ eller $x > 0$.

Nu er

$$1 + x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = (x^2 + 3x + 1)^2 \ .$$

For $x < -3$ og for $x > 0$ er $x^2 + 3x + 1$ positiv.

Hvis ligningen

$$y^4 = (x^2 + 3x + 1)^2$$

har en haltallig løsning, hvor $x < -3$ eller $x > 0$, skal $x^2 + 3x + 1$ være et kvadrattal. Nu gælder imidlertid, at

$$(x + 1)^2 < x^2 + 3x + 1 < (x + 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 3 < 4x + 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x < 0 \ \wedge \ x > -3 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \ ,$$

og analogt

$$(x + 1)^2 > x^2 + 3x + 1 > (x + 2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \ .$$

For $x < -3$ og for $x > 0$ ligger $x^2 + 3x + 1$ altså mellem to kosekutive kvadrattal og kan derfor ikke selv være et kvadrattal.

De heltallige løsninger til ligningen er altså

$$(-3, \pm 1) \ , \ (-2, \pm 1) \ , \ (-1, \pm 1) \ \text{ og } \ (0, \pm 1) \ .$$

***3. metode* (Con Amore Problemgruppe)**

Vi betragter den kurve K i planen, som frem- stilles ved den givne ligning. Opgaven går ud på at finde samtlige punkter med hele ko- ordinater på kurven K. Vi finder, at

$$y^4 = (x^2 + 3x + 1)^2 \ .$$

Den givne ligning er altså ensbetydende med

$$y^2 = \left| x^2 + 3x + 1 \right| .$$

Nu er

$$\left| x^2 + 3x + 1 \right| = \left| (x + \tfrac{3}{2})^2 - \tfrac{5}{4} \right| = \begin{cases} -(x + \frac{3}{2}) + \frac{5}{4} & \text{for } \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ (x + \frac{3}{2}) - \frac{5}{4} & \text{for } x \le \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \text{ og for } x \ge \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \ . \end{cases}$$

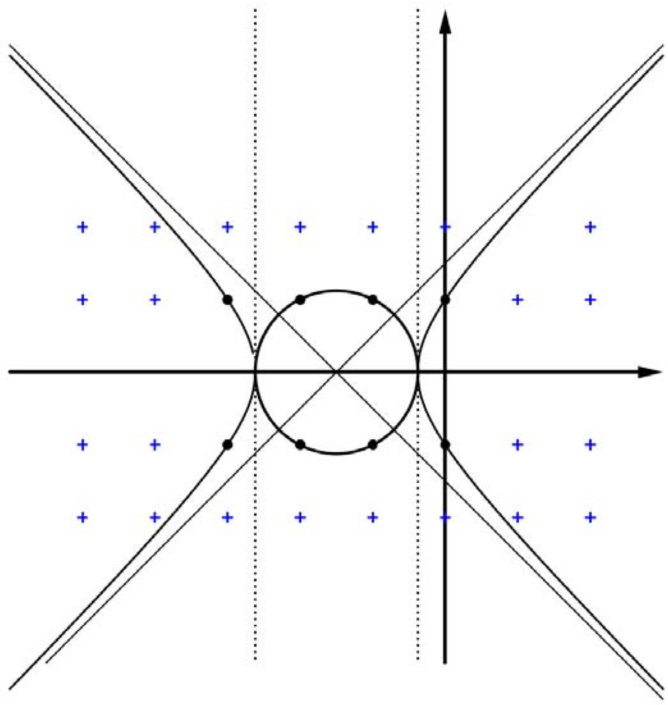
Den givne ligning er altså for $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ (dvs. for -2,618$\le$ x $\le$ -0.382) ensbety- dende med

$$\left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 ,$$

og for $x \le \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \approx -2,618$ og for $x \ge \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \approx -0,382$ ensbetydende med

$$\left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 .$$

Kurven *K* består derfor af en cirkel med centrum i $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ og radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$ og en ligesidet hyperbel med samme centrum og halvakser $\frac{\sqrt{5}}{2}$, som rører hinanden i hyperblens toppunkter $\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},0\right)$ og $\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},0\right)$.



I parallelstrimlen $\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ligger de to heltallige punkter (-2,0) og (-1,0) in- denfor cirklen, de fire heltallige punkter

(-2,1) , (-1,1) , (-2,-1) , (-1,-1)

på cirklen og alle øvrige heltallige punkter yden for cirklen.

Endvidere ses, at hyperblens asymptoter med ligningerne $y = x + \frac{3}{2}$ og $y = -x - \frac{3}{2}$ ik- ke indeholder heltallige punkter, fordi ethvert punkt på en af dem med heltallig abscisse x har en ordinat y, som er et helt tal plus $\frac{1}{2}$.

I de to halvplaner $x \le \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ og $x \ge \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ligger de fire heltallige punkter

(-3,1) , (0,1) , (-3,-1) , (0,-1)

på hyperblen, alle fire i den lodrette afstand $\frac{1}{2}$ fra den nærmeste asymptote. Nærmere ved hyperblens toppunkter ligger der på hyperblen ingen heltallige punkter, og længere ude ligger hvert hyperbelpunkt med heltallig abscisse i en lodret afstand fra den nærme- ste asymptote, som er mindre end $\frac{1}{2}$, og det kan derfor ikke have heltallig ordinat. Der ligger derfor ikke andre heltallige punkter på hyperblen end de fire allerede nævnte.

Kurven *K*, der som nævnt består af cirklen og hyperblen, indeholder derfor de otte heltallige punkter

$$(-3, \pm 1) \ , \ \ (-2, \pm 1) \ , \ (-1, \pm 1) \ , \ (0, \pm 1)$$

og ikke andre. Dermed er opgaven løst.