Svar på opgave 278 (Marts 2011)

Opgave:

a. Vis, at polynomiet

$$p(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \tfrac{3}{4}$$

ikke har reelle rødder. Regnemaskine ikke tilladt!

b. Om polynomiet $p(x)$ oplyses, at

$$p(x^2 + 1) = 6x^4 - x^2 + 5$$

Bestem $p(x^2 - 1)$.

c. Vis, at der ikke findes hele tal a, b, c og d, så polynomiet

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

opfylder, at $p(19) = 1$ og $p(62) = 2$.

Besvarelse:

a.
1. metode
Vi har, at

$$p(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \tfrac{3}{4} = x^4\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{3}{4}x^2\left(x - \tfrac{2}{3}\right)^2 + \tfrac{2}{3}\left(x - \tfrac{3}{4}\right)^2 + \tfrac{3}{8}$$

hvoraf

$$p(x) \geq \tfrac{3}{8} \quad \text{for alle } x\,.$$

Altså har $p(x)$ ingen reelle rødder.

2. metode (Asger Olesen, Tønder og Anders Crone, Kalundborg)
Vi sætter

$$f(x) = (x + 1)p(x) = (x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \tfrac{3}{4})(x + 1) = x^7 - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{4}\,.$$

Vi har, at $f'(x) = 7x^6 - \frac{1}{4}$, så

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}\,,$$

og dermed ses, at

$$f \text{ er voksende for } x \leq -\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}} \text{ og for } x \geq \sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}\,,$$

$$f \text{ er aftagende for } -\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}} \leq x \leq \sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}\,.$$

Funktionsværdierne i de lokale ekstremumspunkter er

$$f\left(-\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}\right)=\tfrac{3}{4}+\tfrac{3}{14}\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}>0 \quad \text{og} \quad f\left(\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}\right)=\tfrac{3}{4}-\tfrac{3}{14}\sqrt[6]{\tfrac{1}{28}}>0 \ .$$

Derfor kan vi slutte, at f kun har en reel rod. Vi ser umiddelbart, at denne rod er $x = -1$ Da . $f(x) = (x + 1)p(x)$, betyder det, at $p(x)$ enten ikke har reelle rødder eller at $p(-1) = 0$. Ved indsættelse fås, at $p(-1) = 6\tfrac{3}{4} \neq 0$. Altså har $p(x)$ ingen reelle rødder.

3. metode (Hans Benner, Randers)
Vi kan skrive, at

$$p(x) = (x^6 - x^5 + \tfrac{1}{4}) + (x^4 - x^3 + \tfrac{1}{4}) + (x^2 - x + \tfrac{1}{4}) \ .$$

Vi sætter

$$f_1(x) = x^6 - x^5 + \tfrac{1}{4} \quad , \quad f_2(x) = x^4 - x^3 + \tfrac{1}{4} \quad , \quad f_3(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{4}$$

Så er

$$f_1'(x) = x^4(6x-5) \quad , \quad f_2'(x) = x^2(4x-3) \quad , \quad f_3'(x) = 2x-1 \ .$$

For f_1 gælder, at f_1 er aftagende for $x \leq \tfrac{5}{6}$ og voksende for $x \geq \tfrac{5}{6}$. Minimumsværdien er

$$f_1\left(\tfrac{5}{6}\right)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{5^5}{6^6}>0 \ .$$

For f_2 gælder, at f_2 er aftagende for $x \leq \tfrac{3}{4}$ og voksende for $x \geq \tfrac{3}{4}$. Minimumsværdien er

$$f_2\left(\tfrac{3}{4}\right)=\tfrac{1}{4}-\tfrac{3^3}{4^4}>0 \ .$$

For f_3 gælder, at f_3 har minimum for $x = \tfrac{1}{2}$ og

$$f_3\left(\tfrac{1}{2}\right)=0 \ .$$

Altså er $f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) > 0$ for alle x, så $p(x)$ ikke har nogen reelle rødder.

4. metode (Johs. M. Christensen, Tarm)
Vi kan skrive, at

$$p(x) = (x^2 - x)(x^4 + x^2 + 1) + \tfrac{3}{4} = q(x) + \tfrac{3}{4} \ ..$$

Idet

$$q(x) = x(x - 1)(x^4 + x^2 + 1)$$

ser vi af parentesernes fortegn, at

$$q(x) \geq 0 \quad \text{for} \quad x \leq 0 \text{ eller } x \geq 1$$

Altså er $p(x) \geq \tfrac{3}{4}$ i disse intervaller, så $p(x)$ ikke har nogen rødder her.

For $0 < x < 1$ er

$$-\tfrac{1}{4} \leq x^2 - x < 0 \quad \text{og} \quad 1 < x^4 + x^2 + 1 < 3 \ ,$$

den sidste ulighed fordi $0 < x^{2n} < 1$.

Men så er

$$|q(x)| < \tfrac{1}{4}\cdot 3 = \tfrac{3}{4} \ ,$$

så $p(x) > 0$ i intervallet. Derfor har $p(x)$ ingen reelle rødder.

b.
Vi har, at
$$p(x^2 + 1) = 6x^4 - x^2 + 5 = 6(x^2 + 1)^2 - 13(x^2 + 1) + 12 \quad .$$
så $p(x) = 6x^2 - 13x + 12$. Altså er
$$p(x^2 - 1) = 6(x^2 - 1)^2 - 13(x^2 - 1) + 12 = 6x^4 - 25x^2 + 31 \quad .$$

c.
Hvis hele tal a, b, c og d med den nævnte egenskab fandtes, har vi
$$p(62) = 2 \quad , \quad p(19) = 1 \quad ,$$
dvs.
$$\begin{aligned} 1 = 2 - 1 = p(62) - p(19) &= a(62^3 - 19^3) + b(62^2 - 19^2) + c(62 - 19) \\ &= a(62 - 19)(62^2 + 62 \cdot 19 + 19^2) + b(62 - 19)(62 + 19) + c(62 - 19) \quad . \end{aligned}$$
Dette er umuligt, fordi det sidste tal er deleligt med $62 - 19 = 43$.