Svar på opgave 279
(April 2011)

Opgave:

Talfølgen (a_n) er givet ved

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{for } n \geq 1 .$$

Vis, at $a_{100} > 14$.

Besvarelse:

1. metode:

Hvis $a_k \leq n$, er $\frac{1}{a_k} \geq \frac{1}{n}$, så

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k} \geq a_k + \frac{1}{n} \; .$$

Hvert led i talfølgen vokser altså med mindst $\frac{1}{n}$ over det foregående led. Nu er

$$a_1 = 1 \quad , \quad a_2 = 2 \quad , \quad a_3 = 2 + \tfrac{1}{2} \leq 3$$

så vi med voksende nummer n får

$n = 2 + 3 = 5$: $a_5 \geq 3$	$n = 44$: $a_{44} \geq 9$
$n = 2 + 3 + 4 = 9$: $a_9 \geq 4$	$n = 54$: $a_{54} \geq 10$
$n = 2 + 3 + 4 + 5 = 14$: $a_{14} \geq 5$	$n = 65$: $a_{65} \geq 11$
$n = 20$: $a_{20} \geq 6$	$n = 77$: $a_{77} \geq 12$
$n = 27$: $a_{27} \geq 7$	$n = 91$: $a_{91} \geq 13$
$n = 35$: $a_{35} \geq 8$	$n = 105$: $a_{105} \geq 14$

Denne vurdering er imidlertid ikke god nok!
Imidlertid gælder

$$a_{n+1}{}^2 > a_n{}^2 + 2$$

fordi

$$a_{n+1}{}^2 > a_n{}^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 > a_n{}^2 + 2 \;\Leftrightarrow\; a_n{}^2 + \frac{1}{a_n} + 2 > a_n{}^2 + 2 \;,$$

hvilket er sandt. Så er

$$a_3{}^2 > a_2{}^2 + 2 = 6 \quad , \quad a_4{}^2 > a_3{}^2 + 2 > 8 \;,$$

og generelt

$$a_n{}^2 > 2n \;,$$

hvoraf

$$a_{100}{}^2 > 200 > 196 = 14^2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{100} > 14 \ .$$

2. metode:

Vi har at

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$$

og heraf følger, at

$$a_{k+1}{}^2 = a_k{}^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2} > a_k{}^2 + 2 \ . \ .$$

Vi benytter denne ulighed for $k = 1, 2, \ldots, 100$:

$$a_2{}^2 > a_1{}^2 + 2 \quad , \quad a_3{}^2 > a_2{}^2 + 2 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_{100}{}^2 > a_{99}{}^2 + 2 \ .$$

Addition giver

$$a_2{}^2 + a_3{}^2 + \cdots + a_{100}{}^2 > a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_{99}{}^2 + 99 \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad a_{100}{}^2 > a_1{}^2 + 198 = 199$$

hvoraf

$$a_{100} > \sqrt{199} > 14.$$

3. metode (Asger Olesen, Tønder):

Vi viser en vurdering, der er en smule bedre end i metode 1, idet vi viser, at

$$a_n{}^2 \geq 2n - 1 \quad \text{for} \quad n \in N \ . \qquad (1)$$

Vi omskriver rekursionsformlen sådan:

$$a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k} \quad \Leftrightarrow \quad a_{k+1} \cdot a_k = a_k{}^2 + 1 \ . \qquad (2)$$

Desuden får vi brug for den generelle ulighed

$$(x + y)^2 \geq 4xy \ . \qquad (3)$$

Vi viser (1) ved induktion.
  For $n = 1$ er

$$a_1{}^2 = 1^2 = 2 \cdot 1 - 1 \geq 2 \cdot 1 - 1 \ ,$$

hvilket er sandt. Antag så, at

$$a_n{}^2 \geq 2n - 1 \ .$$

Vi benytter (2) og (3) og får

$$\left(a_{n+1} + a_n\right)^2 \geq 4a_{n+1} \cdot a_n = 4\left(a_n{}^2 + 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}{}^2 + 2a_{n+1} \cdot a_n + a_n{}^2 \geq 4a_n{}^2 + 4$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1}{}^2 \geq 3a_n{}^2 + 4 - 2a_{n+1} \cdot a_n \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}{}^2 \geq 3a_n{}^2 + 4 - 2\left(a_n{}^2 + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{n+1}{}^2 \geq a_n{}^2 + 2 \geq (2n - 1) + 2 = 2(n + 1) - 1 \ .$$

Her har vi i den sidste ulighed benyttet induktionsantagelsen. Vi har altså, at

$$a_{100} \geq \sqrt{199} > \sqrt{196} = 14.$$

Bemærkning:

Vi har, at

$$a_n \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a_n^2} \leq 1$$

og derfor

$$a_{k+1}^2 = a_k^2 + 2 + \frac{1}{a_k^2} < a_k^2 + 3 \; .$$

Altså har vi ulighederne

$$a_1^2 + 2 < a_2^2 \leq a_1^2 + 3$$
$$a_2^2 + 2 < a_3^2 \leq a_2^2 + 3$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_{99}^2 + 2 < a_{100}^2 \leq a_{99}^2 + 3 \; .$$

Addition giver

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{99}^2 + 198 < a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_{100}^2 < a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{99}^2 + 297$$

$$\Leftrightarrow \quad 199 < a_{100}^2 < 298 \quad \Leftrightarrow \quad 14 < \sqrt{199} < a_{100} \leq \sqrt{298} < 18$$