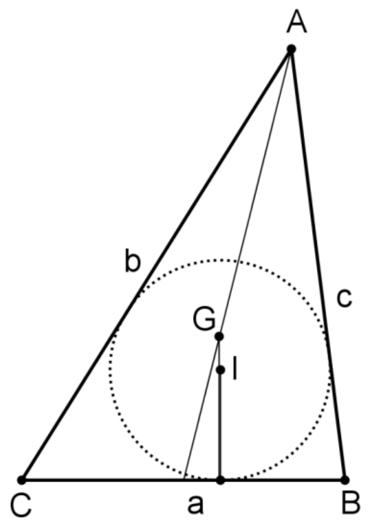
Svar på opgave 282 (September 2011)

Opgave:

I ΔABC er I centrum for den indskrevne cirkel og G medianernes skæringspunkt. Vis, at $IG \perp BC$ netop hvis $b = c$ eller $b + c = 3a$.

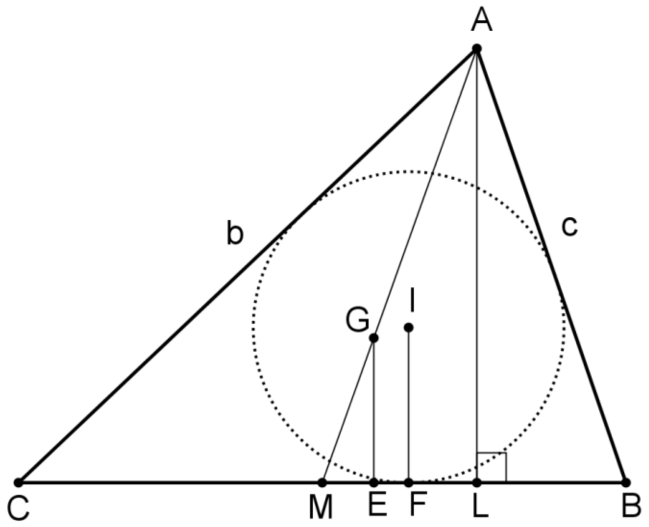


Besvarelse:

1. metode:

Lad AL være højden fra A og E og F projektionerne af G og I på BC. Desuden er M midtpunkt af BC.
Det er velkendt, at afstanden fra vinkelspidsen B til røringspunktet F for den indskrevne cirkel er $BF = s - b$. Dermed er

$$MF = MB - BF = \tfrac{1}{2}a - (s - b) = \tfrac{1}{2}(a - 2s + 2b) = \tfrac{1}{2}(a - a - b - c + 2b) = \tfrac{1}{2}(b - c)$$



I ΔALB er

$$\cos B = \frac{LB}{c}$$

og desuden er

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \quad ,$$

og af disse to ligninger får vi

$$LB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

Da ΔMGE og ΔMAL er ensvinklede i forholdet 1:3 er

$$ME = \frac{1}{3}ML = \frac{1}{3}\left(MB - BL\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) = \frac{b^2-c^2}{6a}$$

Nu har vi

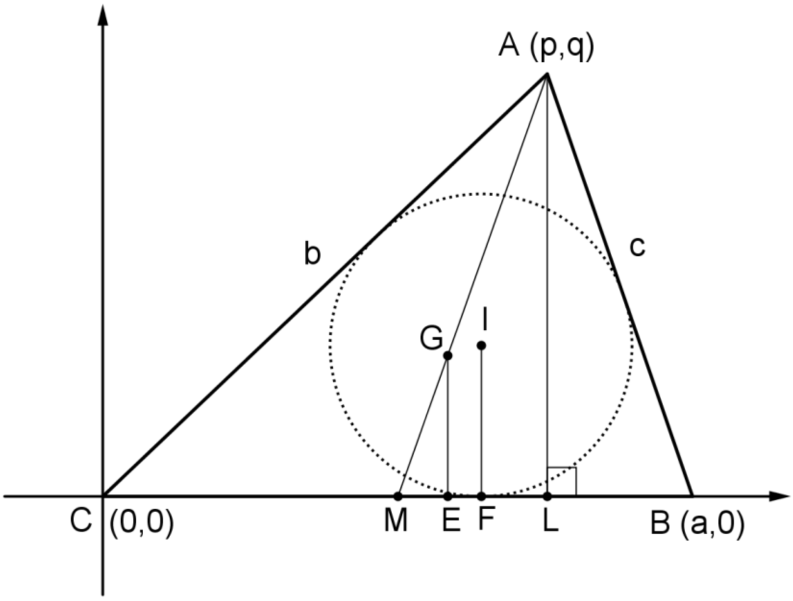
$$IG \perp BC \quad \Leftrightarrow \quad ME = MF \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-c}{2} = \frac{b^2-c^2}{6a}$$

$$\Leftrightarrow \quad 6a\left(b-c\right) = 2\left(b-c\right)\left(b+c\right) \quad \Leftrightarrow \quad b-c=0 \vee 6a = 2(b+c) \quad \Leftrightarrow \quad b=c \vee b+c=3a \ .$$

2. metode:

Vi viser en metode ved hjælp af analytisk geometri. Vi anbringer trekanten i koordinatsystemet, så C (0,0), B (a,0) og A (p,q). Så har medianernes skæringspunkt G koordinaterne

$$G\left(\frac{a+p}{3} \ , \ \frac{q}{3}\right) \ .$$



Vi har, at $CF = s - c$, så hvis $IG \perp BC$, er

$$s - c = \frac{a+p}{3} \iff 6s - 6c = 2a + 2p.$$

$$\iff 3a + 3b + 3c - 6c = 2a + 2p \iff 2p = a + 3b - 3c\ . \qquad (1)$$

I ΔALB er $LB = a - p$ og $AL = q$, så

$$(a - p)^2 + q^2 = c^2 \iff a^2 + p^2 + q^2 - 2ap = c^2 \qquad (2)$$

og i ΔALC er $LC = p$ og $AL = q$, så

$$p^2 + q^2 = b^2\ . \qquad (3)$$

Vi indsætter (3) i (2):

$$a^2 + b^2 - 2ap = c^2\ ,$$

og heri indsættes (1):

$$a^2 + b^2 - a(a + 3b - 3c) = c^2 \iff a^2 + b^2 - a^2 - 3ab + 3ac = c^2$$

$$\iff 3a(c - b) = c^2 - b^2 \iff 3a(c - b) = (c - b)(c + b) \iff c = b \ \vee \ 3a = b + c$$