Svar på opgave 285 (December 2011)

Opgave:

Bestem naturlige tal *p*, *q* og *r* så tallet

$$S = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$$

bliver så stort som muligt, når samtidig $S < \frac{1}{2}$.

Med andre ord: Hvilke tre stambrøker har en sum, der tilnærmer $\frac{1}{2}$ bedst nedefra?

Besvarelse:

Vi kan antage, at $p \le q \le r$. Da $\frac{1}{p} < \frac{1}{2}$, er $p > 2$. Lad først $p = 3$. Så er

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} = S - \frac{1}{p} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \ .$$

Heraf følger, at $\frac{1}{q} < \frac{1}{6}$ eller $q > 6$. Hvis $q = 7$, er

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2}$$

hvoraf

$$\frac{1}{r} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42} \ ,$$

så $r > 42$. Hvis $r = 43$, er

$$S = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} = \frac{451}{903} < \frac{451}{902} = \frac{1}{2} \ .$$

Er $\frac{451}{903}$ nu også den bedste tilnærmelse til $\frac{1}{2}$ nedefra? Vi eftersøger altså naturlige tal *p*, *q* og *r*, så

$$\frac{451}{903} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{2} \ .$$

Vi antager, at $p \le q \le r.$, så

$$\frac{451}{903} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{3}{p} \qquad (1)$$

dvs. vi har

$$\frac{451}{903} < \frac{3}{p} \quad \Leftrightarrow \quad 451p < 2709 \quad \Leftrightarrow \quad p < 6{,}0067 \ ,$$

altså $p \le 6$, så vi har at $3 \le p \le 6$.

Desuden er

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{q}<\frac{1}{2}-\frac{1}{p}=\frac{p-2}{2p} \Leftrightarrow q>\frac{2p}{p-2} ,$$

og af (1) fås

$$\frac{451}{903}-\frac{1}{p}<\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{1}{q}+\frac{1}{q}=\frac{2}{q}$$

så at

$$\frac{451}{903}-\frac{1}{p}\le\frac{2}{q} \Leftrightarrow \frac{451p-903}{903p}\le\frac{2}{q} \Leftrightarrow \frac{q}{2}\le\frac{903p}{451p-903} \Leftrightarrow q\le\frac{1806p}{451p-903} .$$

Ialt har vi nu

$$\frac{2p}{p-2}<q\le\frac{1806p}{451p-903} .$$

Denne ulighed giver følgende tilfælde for $3\le p\le 6$:

$$p=3 : \ 6<q\le 12{,}09 \quad , \quad p=5 : \ 3{,}33<q\le 6{,}68$$
$$p=4 : \ 4<q\le 8{,}01 \quad , \quad p=6 : \ 3<q\le 6{,}01 .$$

Idet $p\le q$ kan vi gennemgå samtlige tilfælde i nedenstående tabel

p	q	r	$\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)$
3	7	43	1/1806
3	8	25	1/600
3	9	19	1/342
3	10	16	1/240
3	11	14	1/231
3	12	13	1/156
4	5	21	1/420
4	6	13	1/156
4	7	10	1/140
4	8	9	1/72
5	5	11	1/110
5	6	9	1/120
6	6	7	1/42

Fx fås for p = 3 og q = 9, at

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{r}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{r}<\frac{1}{18} \Leftrightarrow r>18 ,$$

dvs. vi lader r = 19.

Altså er

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}$$

den bedste tilnærmelse nedefra til 2 som sum af tre stambrøker.