Svar på opgave 286 (Januar 2012)

Opgave:

Vis, at

$$\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}-1}{4} \quad .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi sætter $v=\frac{2\pi}{13}$. Vi skal vise, at

$$z=\cos v+\cos 3v+\cos 4v=\frac{\sqrt{13}-1}{4} \quad .$$

Tallet z er rod i en andengradsligning af formen $ax^2 + bx + c = 0$. Vi får

$$a\cdot\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right)^2+b\cdot\frac{\sqrt{13}-1}{4}+c=a\cdot\frac{7-\sqrt{13}}{8}+b\cdot\frac{2\sqrt{13}-2}{8}+c$$

$$=\frac{1}{8}\left(7a-2b+8c+\sqrt{13}\cdot(-a+2b)\right)=0 \ .$$

Dette er opfyldt netop hvis vi vælger a, b og c så

$$7a - 2b + 8c = 0 \quad \text{og} \quad -a + 2b = 0 \ .$$

Vi kan fx sætte $a = 2$. Så er $b = 1$ og

$$7\cdot 2 - 2 + 8c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{3}{2} \quad .$$

Det besynderlige tal z er altså rod i ligningen

$$2x^2 + x - \tfrac{3}{2} = 0$$

Vi udregner derfor

$$2z^2 + z - \tfrac{3}{2} = 2(\cos v + \cos 3v + \cos 4v)^2 + \cos v + \cos 3v + \cos 4v - \tfrac{3}{2}$$

$$= 2\cos^2 v + 2\cos^2 3v + 2\cos^2 4v + 4\cos v\cdot\cos 3v + 4\cos v\cdot\cos 4v + 4\cos 3v\cdot\cos 4v$$

$$+ \cos v + \cos 3v + \cos 4v - \tfrac{3}{2} \quad .$$

Nu gælder de trigonometriske formler

$$4\cos x\cdot\cos y = 2\cos(x - y) + 2\cos(x + y) \quad \text{og} \quad 2\cos^2 x = 1 - 2\cos 2x \ ,$$

så vi får

$$2z^2 + z - \tfrac{3}{2} = 1 + \cos 2v + 1 + \cos 6v + 1 + \cos 8v + 2\cos 2v + 2\cos 4v$$
$$+ 2\cos 3v + 2\cos 5v + 2\cos v + 2\cos 7v + \cos v + \cos 3v + \cos 4v - \tfrac{3}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2} + 3\cos v + 3\cos 2v + 3\cos 3v + 3\cos 4v + 2\cos 5v + \cos 6v + 2\cos 7v + \cos 8v$$
$$= \tfrac{3}{2} + 3(\cos v + \cos 2v + \cos 3v + \cos 4v + \cos 5v + \cos 6v)\ .$$

Dette skal være lig med 0, så vi ønsker at vise, at

$$\cos v + \cos 2v + \cos 3v + \cos 4v + \cos 5v + \cos 6v = -\tfrac{1}{2} \quad \text{eller} \quad \sum_{n=1}^{6} \cos\frac{2\pi n}{13} = -\tfrac{1}{2}\ .$$

Nu er

$$\sum_{n=1}^{13} \cos\frac{2\pi n}{13} = 0$$

netop summen af de 13. komplekse enhedsrødder, dvs.

$$\sum_{n=1}^{12} \cos\frac{2\pi n}{13} + 1 = 0 \iff \sum_{n=1}^{6} \cos\frac{2\pi n}{13} + \sum_{n=7}^{12} \cos\frac{2\pi n}{13} = -1\ .$$

Leddene i de to summer er parvis realdelen af hinandens konjugerede 13. enhedsrødder og derfor ens. Altså er de to summer begge lig med $-\tfrac{1}{2}$, hvilket er det ønskede.

2. metode

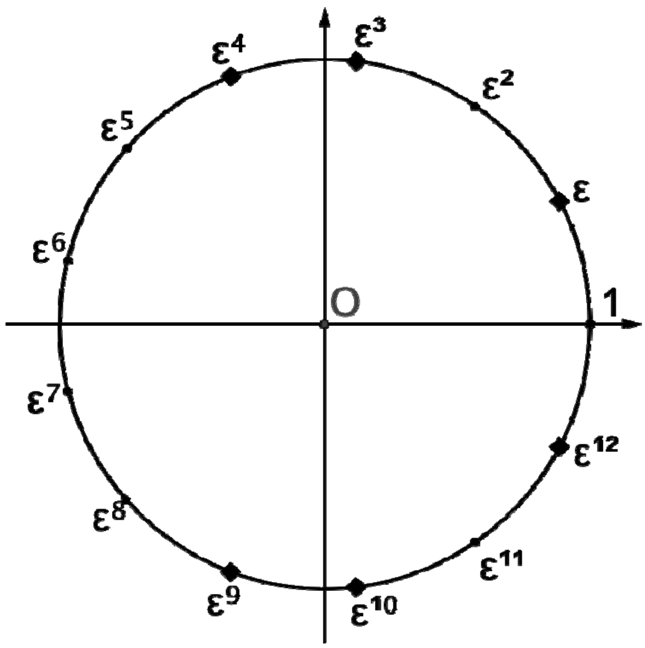
Vi skal vise, at

$$\cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13} = \frac{\sqrt{13}-1}{4}\ . \qquad (1)$$

På figuren er afsat rødderne i cirkel- delingspolynomiet $x^{13} - 1$. Da summen af rødderne er 0 (nemlig koefficienten til leddet af grad 12), gælder med figurens navne, at

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \cdots + \varepsilon^{12} = -1\ . \qquad (2)$$

På figuren er med ♦ markeret de seks rødder, hvis realdel er et af leddene på venstre side af lighedstegnet i formlen (1).



Der gælder følgelig, at

$$a = \varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \varepsilon^{10} + \varepsilon^{12} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13} + \cos\frac{8\pi}{13}\right). \qquad (3)$$

Vi betegner med b summen af de seks

øvrige ikke-reelle rødder i x^{13} - 1, altså

$$b = \varepsilon^2 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{11} \ .$$

Så gælder efter (2), (3) og (4), at

$$a + b = -1 \ . \qquad (4)$$

Endvidere viser lidt regnearbejde (ikke overraskende), at de i alt 36 led i produktet ab fordeler sig med 3 af hver af de 12 ikke-reelle rødder i $x^{13} - 1$, dvs. det gælder efter (2), at

$$ab = -3. \qquad (5)$$

Det fremgår af (4) og (5), at a og b er rødder i andengradspolynomiet $x^2 + x - 3$, og da a tydeligvis er den største af de to rødder (se figuren), finder vi altså, at

$$a = \frac{\sqrt{13}-1}{2} \ \text{ og } \ b = \frac{-\sqrt{13}-1}{2} \ . \qquad (6)$$

Nu følger (1) af (3) og (6).

Bemærkning. Et par uddybende kommentarer:

På ganske tilsvarende måde kan man generelt vise, at hvis $p = 4k + 1$ er et primtal, så er det muligt at opdele de $2k$ rødder i x^p - 1 med positiv kompleksdel i to lige store por- tioner, så at summen af realdelene af de k rødder i den ene portion er $\frac{1}{4}\left(\sqrt{p}-1\right)$ og summen af realdelene af de k rødder i den anden portion er $\frac{1}{4}\left(-\sqrt{p}-1\right)$.

Det simpleste tilfælde er selvfølgelig p = 5, hvor k = 1, og hvor der altså kun er en enkelt rod i hver af de to portioner; de to omtalte summer består da hver kun af et enkelt led, og man får de velkendte resultater

$$\cos\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \text{og} \quad \cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-\sqrt{5}-1}{4}\ .$$

I tilfældet $p = 13$ (som opgaven handlede om) er $k = 3$, så der er altså 3 rødder i hvber portion og 3 led i hver sum, og resultaterne er

$$\cos\frac{2\pi}{13}+\cos\frac{6\pi}{13}+\cos\frac{8\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}-1}{4} \qquad \text{og} \quad \cos\frac{4\pi}{13}+\cos\frac{10\pi}{13}+\cos\frac{12\pi}{13}=\frac{-\sqrt{13}-1}{4}\ .$$

I tilfældet $p = 17$ er $k = 4$, så der er altså 4 rødder i hver portion og 4 led i hver sum, og resultaterne er

$$\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}+\cos\frac{16\pi}{17}=\frac{\sqrt{17}-1}{4}$$

og

$$\cos\frac{6\pi}{17}+\cos\frac{10\pi}{17}+\cos\frac{12\pi}{17}+\cos\frac{14\pi}{17}=\frac{-\sqrt{17}-1}{4}\ .$$

Sådan fortsætter det. Opdelingerne svarer til, at den cykliske gruppe $\left(\{1,2,3,4\}\ ,\cdot_5\right)$ har undergruppen $\left(\{1,4\}\ ,\cdot_5\right)$ med sideklassen {2,3}; den cykliske gruppe $\left(\{1,2,3,\ldots,12\}\ ,\cdot_{13}\right)$ har undergruppen $\left(\{1,3,4,9,10,12\}\ ,\cdot_{13}\right)$ med sideklassen {2,5,6,7,8,11}; den cykliske gruppe $\left(\{1,2,3,\ldots,16\}\ ,\cdot_{17}\right)$ har undergruppen $\left(\{1,2,4,8,9,13,15,16\}\ ,\cdot_{17}\right)$ med sideklassen {3,5,6,7,10,11,12,14} osv.