Svar på opgave 287 (Februar 2012)

Opgave:

Vis, at der for positive tal $n > 1$ gælder

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}>\frac{2}{3}\ .$$

Besvarelse:

Vi skal vise, at

$$\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}>\frac{2}{3}\ .$$

Vi har, at

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\ ,$$

så vi kan skrive produktet sådan:

$$\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{4}\cdot\frac{13}{7}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{21}{13}\right)\cdot\left(\frac{4}{6}\cdot\frac{31}{21}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}\cdot\frac{43}{31}\right)\cdot\left(\frac{6}{8}\cdot\frac{57}{43}\right)$$

$$\cdots\left(\frac{n-2}{n}\cdot\frac{(n-1)^2+(n-1)+1}{(n-1)^2-(n-1)+1}\right)\cdot\left(\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)\ .$$

Her er tælleren i den tredjesidste brøk lig med nævneren i den sidste:

$$(n-1)^2+(n-1)+1=n^2-2n+1+n-1-1=n^2-n+1\ .$$

Desuden er nævneren i den første brøk i en af parenteserne lig med tælleren i den første brøk to parenteser længere fremme. Altså kan vi bortforkorte næsten alt og produktet bliver blot

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n^2+n}>\frac{2}{3}\ .$$