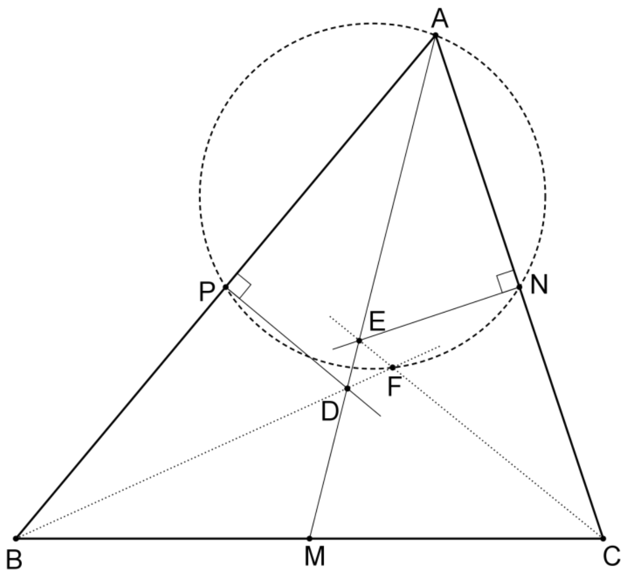
Svar på opgave 289 (April 2012)

Opgave:

I en skæv, spidsvinklet ΔABC er M, P og N midtpunkter af siderne BC, AB og AC.
Midtnormalerne gennem P og N skærer medianen AM i D og E.
Desuden skærer BD og CE hinanden i F.
Vis, at punkterne A, N, F og P ligger på en cirkel.



Besvarelse:

Lad O være centrum for den omskrevne cirkel i ΔABC. Vi har, at

$$\angle APO = \angle ANO = 90° \ .$$

Vi vil vise, at $\angle AFO = 90°$, thi så er AO fælles hypotenuse for ΔAPO, ΔANO og ΔAFO, så punkterne A, P, O, F og N ligger på en cirkel med AO som diameter.

Vi kan gå ud fra, at $AB > AC$. Da PD er midtnormal for AB, er ΔADB ligebenet med $AD = BD$. På samme måde er ΔAEC ligebenet med $AE = CE$. Vi sætter

$$x = \angle ABD = \angle BAD \quad \text{og} \quad y = \angle CAE = \angle ACE \ ,$$

så at

$$x + y = A \ .$$

Sinusrelationerne i ΔABM og ΔACM giver

$$\frac{BM}{\sin x}=\frac{AB}{\sin\angle BMA} \quad \text{og} \quad \frac{CM}{\sin y}=\frac{AC}{\sin\angle CMA}\ .$$

Nu er $\sin\angle BMA=\sin\angle CMA$, så vi ved division får

$$\frac{BM}{\sin x}\cdot\frac{\sin y}{CM}=\frac{AB}{AC}\ ,$$

og da $BM = MC$ får vi

$$\frac{\sin x}{\sin y}=\frac{AC}{AB}\ . \tag{1}$$

Sinusrelationerne i ΔABF og ΔACF giver

$$\frac{AF}{\sin x}=\frac{AB}{\sin\angle AFB} \quad \text{og} \quad \frac{AF}{\sin y}=\frac{AC}{\sin\angle AFC}\ ,$$

og division giver

$$\frac{AF}{\sin x}\cdot\frac{\sin y}{AF}=\frac{AB}{\sin\angle AFB}\cdot\frac{\sin\angle AFC}{AC} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\sin x}{\sin y}=\frac{AC\cdot\sin\angle AFB}{AB\cdot\sin\angle AFC}\ . \tag{2}$$

Ligningerne (1) og (2) giver

$$\frac{AC\cdot\sin\angle AFB}{AB\cdot\sin\angle AFC}=\frac{AC}{AB} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\angle AFB=\sin\angle AFC\ . \tag{3}$$

I ΔADB er

$$\angle BDA=180^\circ-2x \quad \text{så} \quad \angle EDF=2x\ ,$$

og i ΔAEC er

$$\angle CEA=180^\circ-2y \quad \text{så} \quad \angle DEF=2y\ .$$

Dermed er

$$\angle EFD=180^\circ-2x-2y=180^\circ-2A\ ,$$

og derfor

$$\angle BFC=180^\circ-\angle EFD=2A.$$

Da O er centrum for den omskrevne cirkel i ΔABC, er $\angle BOC=2A$, og da så $\angle BFC=\angle BOC$, er $\square BOFC$ indskrivelig. Desuden er

$$\angle AFB+\angle AFC=360^\circ-\angle BFC=360^\circ-2A>180^\circ$$

fordi $A < 90^\circ$. Efter (3) gælder så, at

$$\angle AFB=\angle AFC=180^\circ-A\ .$$

Periferivinkler i den omskrevne cirkel for $\square BOFC$ giver, at

$$\angle OFB=\angle OCB\ ,$$

og da ΔBOC er ligebenet med topvinkel $\angle BOC=2A$, er

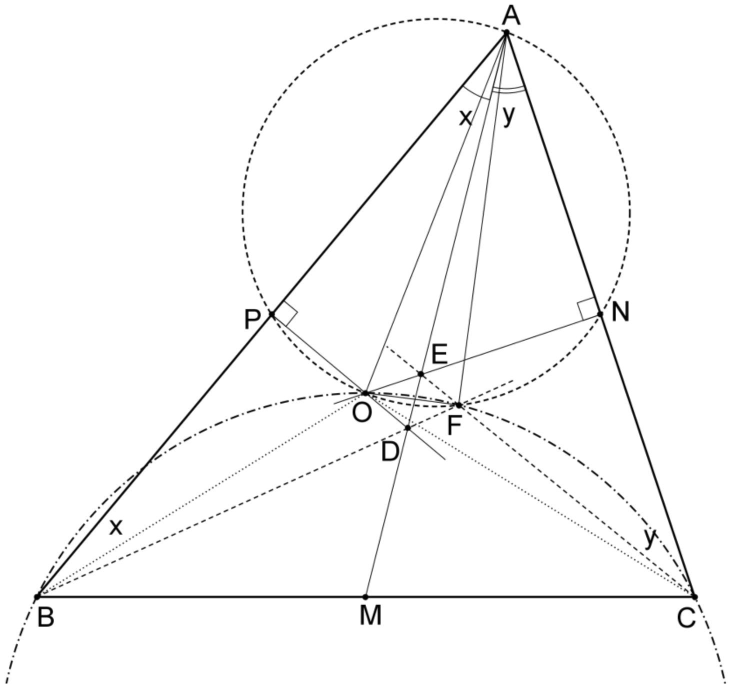
$$\angle OCB=\tfrac{1}{2}\left(180^\circ-2A\right)=90^\circ-A\ .$$

Endelig er

$$\angle AFO=\angle AFB-\angle OFB=\left(180^\circ-A\right)-\left(90^\circ-A\right)=90^\circ\ ,$$

hvilket er det ønskede.

(se figur næste side)


A
x
y
P
N
E
O
F
D
x
y
B
M
C