Svar på opgave 299 (April 2013)

Opgave:

a. Vi har, at der for rationale tal a og b (ikke begge 0) gælder:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\ .$$

Bestem på samme måde rationale tal p, q og r så

$$\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{2}^2}=p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{2}^2\ .$$

b. Forkort brøken

$$\frac{a^{3n+1}-a^4}{a^{2n+3}+a^{n+4}+a^5}\ ,$$

hvor n er positiv og hel og $a \neq 0$.

c. Det oplyses, at $a^2 + 2b^2 = 3c^2$. Vis, at

$$\frac{a+2b+3c}{a+c}\cdot\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b-c}{b-a}\right)$$

er et helt positivt tal

Besvarelse:

a. Vi har, at

$$\frac{1}{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{2}^2}=p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{2}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{2}^2\right)\cdot\left(p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{2}^2\right)=1\ .$$

For nemheds skyld sætter vi $x=\sqrt[3]{2}$ og får

$$(a + bx + cx^2)(p + qx + rx^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad ap + aqx + arx^2 + bpx + bqx^2 + brx^3 + pcx^2 + qcx^3 + rcx^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow\quad ap + (aq + bp)x + (ar + bq + pc)x^2 + (br + qc)x^3 + rcx^4 = 1\ .$$

Nu er $x^3 = 2$ og $x^4 = 2x$, så

$$ap + 2br + 2qc + (aq + bp + 2rc)x + (ar + bq + pc)x^2 = 1\ .$$

På matrixform må der altså gælde:

$$\begin{pmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinanten er

$$D = a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc,$$

og man får ved brug af invers matrix, at

$$p = \frac{a^2 - 2bc}{D} \;,\; q = \frac{2c^2 - ab}{D} \;,\; r = \frac{b^2 - ac}{D} .$$

Fx er

$$\frac{1}{1 - 3\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2}^2} = \frac{1}{15}\left(13 + 11\sqrt[3]{2} + 7\sqrt[3]{2}^2\right) .$$

Vi mangler at godtgøre, at $D \neq 0$. Af uligheden mellem aritmetisk og geometrisk middeltal følger, at

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 \geq 3\sqrt[3]{a^3 \cdot 2b^3 \cdot 4c^3} = 3\sqrt[3]{8a^3b^3c^3} = 6abc ,$$

så $D \geq 0$. Tilfældet $D = 0$ indtræffer, netop hvis de tre tal er ens, dvs. hvis

$$a^3 = 2b^3 = 4c^3 .$$

Denne sammenhæng er imidlertid udelukket, fordi a, b og c er rationale og $\sqrt[3]{2}$ er irrational.

b. For $n = 1$ får vi

$$\frac{a^4 - a^4}{a^5 + a^5 + a^5} = 0$$

For $n = 2$ får vi

$$\frac{a^7 - a^4}{a^7 + a^6 + a^5} = \frac{a^4\left(a^3 - 1\right)}{a^5\left(a^2 + a + 1\right)} = \frac{a^4\left(a - 1\right)\left(a^2 + a + 1\right)}{a^5\left(a^2 + a + 1\right)} = \frac{a - 1}{a} .$$

Endelig giver $n = 3$, at

$$\frac{a^{10} - a^4}{a^9 + a^7 + a^5} = \frac{a^4\left(a^6 - 1\right)}{a^5\left(a^4 + a^2 + 1\right)} = \frac{a^4\left(a^2 - 1\right)\left(a^4 + a^2 + 1\right)}{a^5\left(a^4 + a^2 + 1\right)} = \frac{a^2 - 1}{a} .$$

Vi gætter derfor på, at de gælder

$$\frac{a^{3n+1} - a^4}{a^{2n+3} + a^{n+4} + a^5} = \frac{a^{n+1} - 1}{a} .$$

At dette er sandt ses ved at gange over kors.

c. Vi får, at

$$\frac{a+b}{b+c} \cdot \frac{a+2b+3c}{a+c} = \frac{a^2 + 2ab + 3ac + ab + 2b^2 + 3bc}{ab + bc + ac + c^2}$$

$$= \frac{\left(a^2 + 2b^2\right) + 2ab + 3ac + ab + 3bc}{ab + bc + ac + c^2} = \frac{3c^2 + 3ab + 3ac + 3bc}{c^2 + ab + ac + bc} = 3 .$$

Desuden er

$$\frac{b-c}{b-a}\cdot\frac{a+2b+3c}{a+c}=\frac{ab+2b^2+3bc-ac-2bc-3c^2}{ab+bc-a^2-ac}$$
$$=\frac{\left(2b^2-3c^2\right)+ab+3bc-ac-2bc}{ab+bc-a^2-ac}=\frac{-a^2+ab-ac+bc}{-a^2+ab-ac+bc}=1\,.$$

Altså er det angivne udtryk lig med 3 + 1 = 4.