Svar på opgave 300
(Maj 2013)

Opgave:

a. Bestem alle polynomier $f(x)$, som opfylder at

$$x \cdot f(x - 1) = (x - 2) \cdot f(x)$$

b. Polynomiet $f(x)$ har hele koefficienter og ved division med polynomiet $x^2 - 12x + 11$ giver det resten $990x - 889$.
Vis, at $f(x)$ ikke har hele rødder.

c. Et tredjegradspolynomium $f(x)$ har tre forskellige reelle rødder a, b og c og koefficienten til x^3 er positiv.
Vis, at $f'(a) + f'(b) + f'(c) > 0$.

Besvarelse:

a. For $x = 1$ får vi

$$1 \cdot f(0) = -1 \cdot f(1) \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = -f(0) ,$$

og $x = 2$ giver

$$2 \cdot f(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(1) = 0 \quad ,$$

og dermed også $f(0) = 0$, dvs. $x = 0$ og $x = 1$ er rødder i $f(x)$. Derfor er $f(x)$ delelig med $x(x - 1) = x^2 - x$, så vi kan skrive, at

$$f(x) = (x^2 - x) \cdot g(x) \quad ,$$

hvor $g(x)$ er et polynomium. Dette indsættes i funktionalligningen for f, idet vi bruger

$$f(x - 1) = ((x - 1)^2 - (x - 1)) \cdot g(x - 1)$$
$$= (x^2 - 2x + 1 - x + 1) \cdot g(x - 1) = (x^2 - 3x + 2) \cdot g(x - 1)$$

Så får vi, at der for alle x gælder

$$x \cdot (x^2 - 3x + 2) \cdot g(x - 1) = (x - 2) \cdot (x^2 - x) \cdot g(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot g(x - 1) = (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = g(x - 1) \quad .$$

Dette medfører, at $g(x)$ er konstant, dvs. $g(x) = a$ og dermed er

$$f(x) = a(x^2 - x) \quad .$$

Ved prøve ser vi, at disse polynomier opfylder funktionalligningen for f.

b. Vi får brug for følgende kendte sætning om polynomier: Hvis $f(x)$ er et polynomium med hele koefficienter, gælder for hele tal p og q, at

$$f(p) - f(q) \text{ er delelig med } p - q \; .$$

Efter det givne har vi, at der findes et polynomium $g(x)$, så

$$f(x) = g(x)\cdot(x^2 - 12x + 11) + 990x - 889$$
$$\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)\cdot(x - 1)(x - 11) + 990x - 889 \; .$$

Så er

$$f(1) = 990 - 889 = 101 \quad \text{og} \quad f(11) = 990\cdot 11 - 889 = 10001 = 73\cdot 137 \; .$$

Antag nu, at x_0 er et nulpunkt for $f(x)$ og at x_0 er et helt tal. Så gælder, at

$$f(1) - f(x_0) \text{ er delelig med } 1 - x_0 \quad \text{eller} \quad 101 \text{ er delelig med } 1 - x_0 \; .$$

Heraf fås, at mulighederne er

$$x_0 \;:\; 0 \,,\, 102 \,,\, -100 \,,\, 2 \; .$$

Desuden gælder

$$f(11) - f(x_0) \text{ er delelig med } 11 - x_0 \quad \text{eller} \quad 73\cdot 137 \text{ er delelig med } 11 - x_0 \; .$$

Ingen af de fire fundne værdier for x_0 opfylder imidlertid dette. Altså findes ingen hele tal x_0 som er rod i $f(x)$.

c. Vi har, at

$$f(x) = A(x - a)(x - b)(x - c) \quad \text{og} \quad A > 0 \; .$$

Den afledede er

$$f'(x) = A[(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c)] \; .$$

Dermed er

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) = A((a - b)(a - c) + (b - a)(b - c) + (c - a)(c - b))$$
$$= A(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \; .$$

Nu gælder, at

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \; ,$$

så at

$$f'(a) + f'(b) + f'(c) = \tfrac{1}{2} A\,[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] > 0 \; .$$

Kravet om, at a, b og c er indbyrdes forskellige, kan svækkes til det lidt lempeligere krav, at ikke alle tallene a, b og c er ens.