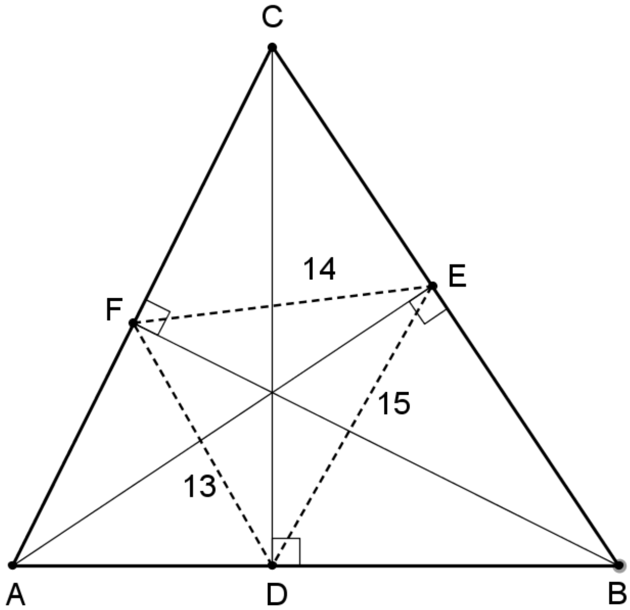
Svar på opgave 301 (August 2013)

Opgave:

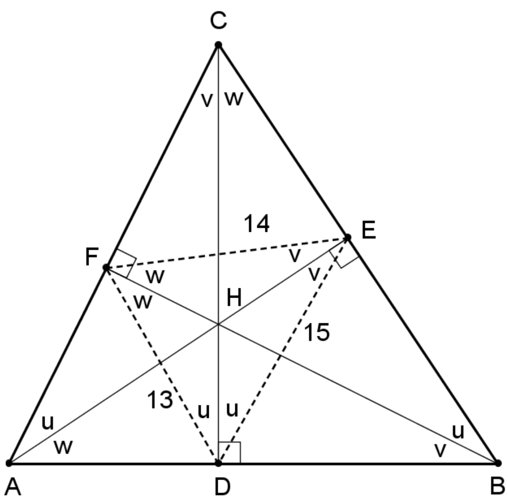


I ΔABC er D, E og F fodpunkter for højderne på siderne AB, BC og AC.
Desuden er $DF = 13$, $EF = 14$ og $DE = 15$.
Beregn længderne af trekantens sider.

Besvarelse:

1. metode.
Det er kendt (?) at højderne er vinkelhalveringslinjer i ΔDEF (fodpunktstrekanten for højdernes skæringspunkt). Idet H er højdernes skæringspunkt sætter vi

$$u = \angle FDH = \angle HDE \ , \ v = \angle FEH = \angle HED \ , \ w = \angle HFE = \angle HFD \ .$$



Da $\square FHDA$ er indskrivelig, er (periferivinkler i den omskrevne cirkel):

$$\angle FAH = u \quad , \quad \angle HAD = w \ ,$$

og da $\square EHDB$ er indskrivelig, er

$$\angle HBD = v \quad , \quad \angle EBH = u \ ,$$

og da endelig $\square EHFC$ er indskrivelig, er

$$\angle FCH = v \quad , \quad \angle HCE = w \ .$$

Vi har, at $u + v + w = 90°$.

Sinusrelationerne i ΔDCF giver

$$\frac{CD}{\sin(90°+w)} = \frac{DF}{\sin v}$$

$$\Leftrightarrow \quad CD = \frac{\cos w}{\sin v} \cdot DF \quad .$$

I ΔADF er

$$\frac{AD}{\sin(90°-w)} = \frac{DF}{\sin(u+w)} \quad \Leftrightarrow \quad AD = \frac{\cos w}{\sin(90°-v)} \cdot DF = \frac{\cos w}{\cos v} \cdot DF \quad .$$

Endelig får vi i ΔDBE, at

$$\frac{BD}{\sin(90°-v)} = \frac{DE}{\sin(u+v)} \quad \Leftrightarrow \quad BD = \frac{\cos v}{\sin(90°-w)} \cdot DE = \frac{\cos v}{\cos w} \cdot DE \quad .$$

I ΔDEF er

$$\cos F = \cos 2w = \frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot 13\cdot 14} = \frac{5}{13} \quad , \quad \cos E = \cos 2v = \frac{14^2+15^2-13^2}{2\cdot 14\cdot 15} = \frac{3}{5}$$

$$\cos D = \cos 2u = \frac{13^2+15^2-14^2}{2\cdot 13\cdot 15} = \frac{33}{65} \quad .$$

Så er

$$\cos w = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\cos 2w\right)} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{5}{13}\right)} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad .$$

Tilsvarende fås, at

$$\cos v = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \text{og} \quad \sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \; .$$

Disse værdier indsættes oven for, og vi får

$$CD = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot 13 = 3\sqrt{65} \quad , \quad AD = \frac{\frac{3}{\sqrt{13}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \cdot 13 = \frac{3}{2}\sqrt{65} \quad , \quad BD = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} \cdot 15 = 2\sqrt{65} \; .$$

Ved lidt algebra fås derefter

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad \Leftrightarrow \quad AC = \frac{15\sqrt{13}}{2}$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 \quad \Leftrightarrow \quad BC = 13\sqrt{5}$$

$$AB = AD + BD = \frac{7\sqrt{65}}{2} \quad .$$

2. metode.

Da $u + v + w = 90°$, er

$$\angle ADF = 90° - u = v + w = C \quad \text{og} \quad \angle AFD = 90° - w = u + v = B \; .$$

Så er ΔAFD og ΔABC ensvinklede. På samme måde er ΔBDE og ΔCEF ensvinklede med ΔABC.

I ΔAFD og ΔABC fås

$$\frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{13}{a} = \frac{AD}{b} \quad \Leftrightarrow \quad AD = \frac{13b}{a} \; ,$$

og i ΔBDE og ΔABC får vi

$$\frac{DE}{AC} = \frac{DB}{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{15}{b} = \frac{DB}{a} \quad \Leftrightarrow \quad DB = \frac{15a}{b} \quad .$$

Addition giver

$$AB = AD + DB = \frac{13b}{a} + \frac{15a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{13b}{a} + \frac{15a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad abc = 13b^2 + 15a^2 \ .$$

Analogt fås ved brug af de andre hjørnetrekanter på figuren, at

$$abc = 13c^2 + 14a^2 \quad , \quad abc = 15c^2 + 14b^2 \ .$$

Subtraktion af de to første ligninger og af den første og den sidste giver

$$a^2 = 13c^2 - 13b^2 \quad \text{og} \quad b^2 = 15a^2 - 15c^2 \ .$$

Ved indsættelse af den første af disse ligninger i den sidste fås

$$c = \frac{7}{3\sqrt{5}} b \qquad (1)$$

og derefter

$$a = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} b \ . \qquad (2)$$

Endelig giver dette efter en smule algebra:

$$c = \frac{13b}{a} + \frac{15a}{b} = 13 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{13}} + 15 \cdot \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{65}}{2} \ .$$

Dette indsættes i (1) og (2), og vi får

$$b = \frac{3\sqrt{5}}{7} c = \frac{3\sqrt{5}}{7} \cdot \frac{7\sqrt{65}}{2} = \frac{15\sqrt{13}}{2}$$

og

$$a = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} b = \frac{2\sqrt{13}}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{15\sqrt{13}}{2} = 13\sqrt{5} \ .$$

Trekanten er 'næsten' ligesidet, idet vi tilnærmet får, at

$$a \approx 29{,}069 \quad , \quad b \approx 27{,}042 \quad , \quad c \approx 28{,}218.$$

3. metode.
Som nævnt under 2. metode er $\angle ADF = C$ og desuden er

$$\angle BDE = 90° - u = v + w = C \ ,$$

og dermed i ΔDEF:

$$\angle FDE = 180° - \angle ADF - \angle BDE = 180° - 2C.$$

Cosinusrelationen giver derfor

$$\cos D = \cos(180° - 2C) = \frac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{33}{65} \ ,$$

hvoraf

$$\cos 2C = -\frac{33}{65} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2\sin^2 C = -\frac{33}{65} \quad \Leftrightarrow \quad \sin C = \frac{7}{\sqrt{65}} \ .$$

På samme måde er

$$\cos E = -\cos 2A = \frac{3}{5} \quad \text{så} \quad \sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

og

$$\cos F = -\cos 2B = \frac{5}{13} \quad \text{så} \quad \sin B = \frac{3}{\sqrt{13}} \ .$$

Punkterne D, E og F ligger på nipunktcirklen for ΔABC, og dennes radius R er halvt så stor som radius R_1 i den omskrevne cirkel i ΔABC. Arealet T af ΔDEF fås af Herons formel til

$$T^2 = s(s-d)(s-e)(s-f) = 21\cdot(21-14)\cdot(21-13)\cdot(21-15) = 84^2 \quad \text{så} \quad T = 84 \ .$$

I ΔDEF har vi, at

$$4RT = def \quad \Leftrightarrow \quad 4R\cdot 84 = 13\cdot 14\cdot 15 \quad \Leftrightarrow \quad R = \tfrac{65}{8} \ .$$

Altså er $R_1 = 2R = \frac{65}{4}$. Sinusrelationen i ΔABC giver derefter

$$a = 2R_1 \cdot \sin A = \frac{65}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 13\sqrt{5} \qquad , \qquad b = 2R_1 \cdot \sin B = \frac{65}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{15\sqrt{13}}{2}$$

$$c = 2R_1 \cdot \sin C = \frac{65}{2}\cdot\frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{7\sqrt{65}}{2} \ .$$

4. metode (Nermin Hotić, Nödinge, Sverige).
Ved hjælp af figurens vinkler ser vi på nogle ensvinklede trekanter:

ΔBHA og ΔEHF : Vi sætter målforholdet til $x = [BHA] : [EHF]$

ΔAHC og ΔDHE : Vi sætter målforholdet til $y = [AHC] : [DHE]$

ΔCHB og ΔFHD : Vi sætter målforholdet til $z = [CHB] : [FHP]$.

Desuden sætter vi $p = FH$. Så er

$$AB = 14x \quad , \quad BC = 13z \quad , \quad AC = 15y \quad , \quad AH = px \quad , \quad CH = pz \ .$$

Pythagoras i ΔAHF og ΔCHF giver

$$AF^2 = (px)^2 - p^2 \quad \Leftrightarrow \quad AF = p\sqrt{x^2-1}$$

$$CF^2 = (pz)^2 - p^2 \quad \Leftrightarrow \quad CF = p\sqrt{z^2-1} \ .$$

Vi ser nu, at

$$AC = AF + CF = p\left(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{z^2-1}\right) .$$

Pythagoras i ΔABF giver

$$BF^2 = (14x)^2 - \left(p\sqrt{x^2-1}\right)^2 = 196x^2 - p^2x^2 + p^2 \ ,$$

og i ΔBCF får vi

$$BF^2 = (13z)^2 - \left(p\sqrt{z^2-1}\right)^2 = 169z^2 - p^2z^2 + p^2 \ .$$

Af disse ligninger følger, at

$$196x^2 - p^2x^2 + p^2 = 169z^2 - p^2z^2 + p^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(196 - p^2) = z^2(169 - p^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad z = x\cdot\sqrt{\frac{196-p^2}{169-p^2}} \ . \tag{3}$$

Vi har, at ΔHCF og ΔABF er ensvinklede, så

$$\frac{CH}{FH} = \frac{AB}{AF} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{pz}{p} = \frac{14x}{p\sqrt{x^2-1}} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{14x}{p\sqrt{x^2-1}} \ . \tag{4}$$

De to sidste ligninger giver

$$\frac{14x}{p\sqrt{x^2-1}} = x\cdot\sqrt{\frac{196-p^2}{169-p^2}} \quad\Leftrightarrow\quad x = \frac{1}{p}\cdot\sqrt{\frac{196\cdot 169-p^4}{196-p^2}} \ . \tag{5}$$

Ved at sætte (5) ind i (3) får vi

$$z = \frac{1}{p}\cdot\sqrt{\frac{196\cdot169-p^4}{196-p^2}\cdot\frac{196-p^2}{169-p^2}} = \frac{1}{p}\cdot\sqrt{\frac{196\cdot169-p^4}{169-p^2}} \ .$$

I ΔDEF er H centrum for den indskrevne cirkel, fordi H er skæringspunkt for vinkelhalveringslinjerne. Lad R, S og T være røringspunkter for den indskrevne cirkel på siderne som vist. Radius i cirklen er r og vi sætter $ER = t$. Lige lange tangentstykker giver så efter tur, at

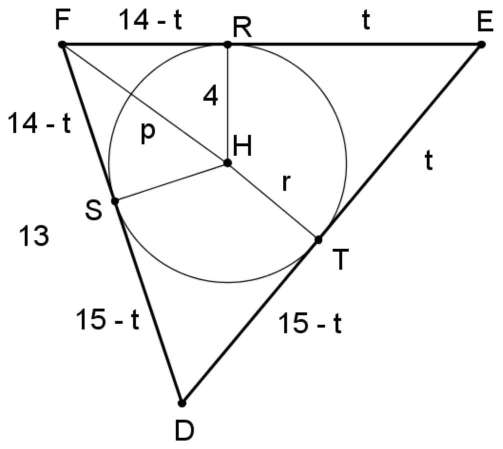
$$ET = t \ , \ DT = DS = 15 - t \ , \ FR = FS = 14 - t \ .$$

Dermed er

$$13 = FD = FS + DS = 14 - t + 15 - t = 29 - 2t \ ,$$

hvoraf $t = 8$. Herons formel giver, at arealet af ΔDEF er 84. Da den halve omkreds er $s = 21$, er

$$84 = r\cdot s \quad\Leftrightarrow\quad r = \tfrac{84}{21} = 4 \ .$$



I ΔFHR er $FR = 14 - 8 = 6$ og $RH = 4$, så

$$p = FH = \sqrt{6^2+4^2} = \sqrt{52} \ .$$

Dermed er efter (5):

$$x = \frac{1}{\sqrt{52}}\cdot\sqrt{\frac{196\cdot169-52^2}{196-52}} = \frac{\sqrt{65}}{4} \ ,$$

hvoraf

$$AB = 14x = \frac{7\sqrt{65}}{2} \ .$$

Vi får, at

$$p\sqrt{x^2-1} = \sqrt{52}\cdot\sqrt{\frac{65}{16}-1} = \frac{7\sqrt{13}}{2} \ ,$$

så at (4) giver

$$z = \frac{7\sqrt{65}}{2}\cdot\frac{2}{7\sqrt{13}} = \sqrt{5} \ .$$

Heraf fås

$$BC = 13z = 13\sqrt{5} \ .$$

Endelig er $AC = p\left(\sqrt{x^2-1}+\sqrt{z^2-1}\right) = \sqrt{52}\cdot\left(\sqrt{\frac{49}{16}}+2\right) = \frac{15\sqrt{13}}{2}$.

Bemærkning. Det er muligt at foretage en generalisation: Hvis sidelængderne i ΔDEF betegnes d, e og f og den halve omkreds er $s = \frac{1}{2}(d+e+f)$, gælder

$$BC = e\cdot\sqrt{\frac{d\cdot f}{(s-d)(s-f)}} \quad , \quad AC = f\cdot\sqrt{\frac{d\cdot e}{(s-d)(s-e)}} \quad , \quad AB = d\cdot\sqrt{\frac{e\cdot f}{(s-e)(s-f)}} \ .$$