Svar på opgave 306 (Januar 2014)

Opgave:

a. Bestem alle sæt af positive hele tal (a,b,c), så $a \le b \le c$ og

$$\left(1+\tfrac{1}{a}\right)\left(1+\tfrac{1}{b}\right)\left(1+\tfrac{1}{c}\right)=3 .$$

b. Bestem alle sæt af positive hele tal (a,b,c), så $a \le b \le c$ og

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 .$$

Besvarelse:

a. Idet $a \le b \le c$ er

$$\left(1+\tfrac{1}{a}\right)\left(1+\tfrac{1}{b}\right)\left(1+\tfrac{1}{c}\right) \le \left(1+\tfrac{1}{a}\right)^3 ,$$

så hvis (a,b,c) er en løsning, er

$$\left(1+\tfrac{1}{a}\right)^3 \ge 3 .$$

Vi ser på nogle værdier af a:

$$a=1 \;:\; (1+1)^3=8 \ge 3 \quad , \quad a=2 \;:\; \left(1+\tfrac{1}{2}\right)^3=\tfrac{27}{8} \ge 3 \quad , \quad a=3 \;:\; \left(1+\tfrac{1}{a}\right)^3=\tfrac{64}{27} \le 3 ,$$

og da funktionen $f(a) = \left(1+\tfrac{1}{a}\right)^3$ er aftagende, kan kun værdierne a = 1 og a = 2 kom- me i betragtning.

I. *a* = 1. Ligningen får her udseendet

$$2\left(1+\tfrac{1}{b}\right)\left(1+\tfrac{1}{c}\right)=3 \quad \Leftrightarrow \quad 2(b+1)(c+1)=3bc \quad \Leftrightarrow \quad bc-2b-2c-2=0 .$$

Opløsning i faktorer giver

$$(b - 2)(c - 2) = 6 .$$

Idet $1 \le b \le c$ har vi her mulighederne

$$\begin{matrix} b-2=1 \\ c-2=6 \end{matrix} \quad \text{eller} \quad \begin{matrix} b-2=2 \\ c-2=3 . \end{matrix}$$

Disse giver løsningerne

$$(a,b,c) \;:\; (1,3,8) \;,\; (1,4,5) .$$

II. *a* = 2. Ligningen ser nu sådan ud:

$$\tfrac{3}{2}\left(1+\tfrac{1}{b}\right)\left(1+\tfrac{1}{c}\right)=3 \quad\Leftrightarrow\quad (b+1)(c+1)=2bc \quad\Leftrightarrow\quad bc-b-c-1=0\ .$$

Opløsning i faktorer giver

$$(b - 1)(c - 1) = 2\ .$$

Idet $2 \le b \le c$ får vi $b - 1 = 1$ og $c - 1 = 2$, hvilket giver løsningen

$$(a,b,c) = (2,2,3)\ .$$

I alt har vi fundet 3 løsninger til ligningen.

---

b. Da $a \le b \le c$ følger, at

$$\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} \ge \frac{1}{c}\ ,$$

så vi kan foretage vurderingen

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}\ .$$

Heraf følger $a \le 3$. Vi gennemgår mulighederne efter tur.

I. *a* = 1. Her får vi åbenbart ingen løsning.

II. *a* = 2. De mulige værdier for *b* gennemregnes:

***b* = 2.** Vi får, at

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{c}=1\ ,$$

hvilket ikke giver nogen løsning.

***b* = 3.** Her er

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1$$

hvilket giver løsningen $(a,b,c) = (2,3,6)$.

***b* = 4.** Vi får

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=1\ ,$$

hvoraf $(a,b,c) = (2,4,4)$.

***b* $\ge$ 5.** Her findes ingen løsninger, thi da $\tfrac{1}{b} \le \tfrac{1}{5}$, er

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{c}=\frac{7}{10}+\frac{1}{c}\ ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{c} \ge \frac{3}{10} \quad\Leftrightarrow\quad c \le \frac{10}{3} < 4\ ,$$

hvilket er i strid med, at $b \le c$.

III. *a* = 3. Mulighederne for *b* gennemregnes:

***b* ≤ 2** er umuligt, da vi forudsætter $a \le b$.

***b* = 3.** Vi får

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{c}=1 \ ,$$

hvoraf løsningen (*a*,*b*,*c*) = (3,3,3).

***b* ≥ 4.** Her findes ingen løsninger, thi da $\frac{1}{b} \le \frac{1}{4}$, er

$$1=\frac{1}{3}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}=\frac{7}{12}+\frac{1}{c}$$

hvoraf

$$\frac{1}{c} \ge \frac{5}{12} \ \Leftrightarrow \ c \le \frac{12}{5} < 3 \ .$$

Dette er i strid med, at $b \le c$.

I alt har vi fundet 3 løsninger til ligningen.

Der er mulighed for flere generaliseringer.

Hvilke naturlige talsæt (*a*,*b*,*c*,*d*) , hvor $a \le b \le c \le d$, er løsninger til ligningen

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

eller til

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=2 \ ?$$