Svar på opgave 308 (Marts 2014)

Opgave:

a. Vis, at $n^2 - 3n - 19$ ikke er delelig med 289 for nogen værdi af n.

b. Vis, at hvis 13 går op i $n^2 + 3n + 51$, så går 169 op i $21n^2 + 89n + 44$.

Besvarelse:

a. Vi har, at

$$n^2 - 3n - 19 = (n - 10)(n + 7) + 51.$$

Antag, at der fandtes en værdi af n, så 289 gik op i $n^2 - 3n - 19$. Så ville også 17 gå op, så 17 ville være divisor i $(n - 10)(n + 7) + 51$ og dermed i $(n - 10)(n + 7)$.

Da 17 er et primtal, ville 17 gå op $n - 10$ eller i $n + 7$. Men da forskellen $(n + 7) - (n - 10) = 17$, gælder, at hvis 17 går op i et af tallene $n - 10$ og $n + 7$, vil 17 også gå op i det andet. Derfor går 289 op i $(n - 10)(n + 7)$.

Da altså 289 går op i $(n - 10)(n + 7)$ og samtidig i $(n - 10)(n + 7) + 51$, slutter vi, at 289 går op i 51, hvilket er umuligt. Derfor findes ingen værdi af n, så 289 går op i $n^2 - 3n - 19$.

b. Vi har, at

$$n^2 + 3n + 51 = (n - 5)(n + 8) + 91 .$$

Antag, at 13 går op i $n^2 + 3n + 51$. Da 13 går op i 91, går 13 altså op i $(n - 5)(n + 8)$ og da 13 er et primtal, går 13 op i $n - 5$ eller i $n + 8$. Der gælder, at

$$13 \mid n-5 \;\Leftrightarrow\; 13 \mid n-5+13 \;\Leftrightarrow\; 13 \mid n+8 .$$

Nu er

$$21n^2 + 89n + 44 = (7n + 4)(3n + 11) = [3(n + 8) + 4(n - 5)]\cdot[2(n + 8) + (n - 5)] \;.$$

Hvis vi for nemheds skyld sætter

$$n + 8 = 13u \quad \text{og} \quad n - 5 = 13v ,$$

får vi

$$21n^2 + 89n + 44 = (3\cdot 13u + 4\cdot 13v)\cdot(2\cdot 13u + 13v) = 169(3u + 4v)(2u + v) \;.$$

Altså går 169 op i $21n^2 + 89n + 44$.