Svar på opgave 309 (April 2014)

Opgave:

Vis, at der for positive reelle tal a, b og c gælder

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b} \geq a+b+c \ .$$

Besvarelse:

1. metode (Asger Olesen, Tønder).

Multiplikation med fællesnævneren giver

$$(a^2+bc)(c+a)(a+b)+(b^2+ca)(b+c)(a+b)+(c^2+ab)(b+c)(c+a)$$
$$\geq (a+b+c)(b+c)(c+a)(a+b) \ .$$

Ved et orgie af kedsommelig algebra multipliceres parenteserne ud og vi får

$$a^4+b^4+c^4 \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$\Leftrightarrow \quad 2a^4+2b^4+2c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^4+b^4-2a^2b^2)+(b^4+c^4-2b^2c^2)+(c^4+a^4-2c^2a^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2 \geq 0$$

hvilket er sandt.

2. metode (Šefket Arslanagić, Sarajevo).

Uligheden omskrives lidt snedigt således:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+a+\frac{b^2+ca}{c+a}+b+\frac{c^2+ab}{a+b}+c \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+bc+a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+ca+b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+ab+c(a+b)}{a+b} \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(a+c)(b+c)}{a+b} \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \quad (a+b)(a+c)(b+c)\left[\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2}\right] \geq (a+b)+(b+c)+(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}+\frac{1}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{(a+c)(b+c)}+\frac{1}{(a+b)(a+c)}+\frac{1}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{b+c}-\frac{1}{a+c}\right)^2+\left(\frac{1}{a+c}-\frac{1}{a+b}\right)^2+\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{b+c}\right)^2\right] \geq 0$$

hvilket er sandt.

3. metode (Šefket Arslanagić, Sarajevo).

Uligheden omskrives således:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a^2+bc-a(b+c)}{b+c}+\frac{b^2+ca-b(c+a)}{c+a}+\frac{c^2+ab-c(a+b)}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{(a-c)(b-c)}{a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(a-b)(a-c)(c+a)(a+b)+(b-c)(b-a)(b+c)(a+b)+(c-a)(c-b)(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)(a+b)}$$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2 \geq 0$$

og derefter forløber udregninger som under 1. metode.