Svar på opgave 310 (Maj 2014)

Opgave:

Bestem alle hele tal *a*, så

$$\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}}$$

er et rationalt tal.

Besvarelse:

Vi kræver, at

$$\frac{9a+4}{a-6} \geq 0 \text{ dvs. } a \leq -\tfrac{4}{9} \;\vee\; a > 6 \,,$$

og sætter

$$\frac{9a+4}{a-6} = \frac{p^2}{q^2} \,,$$

hvor *p* og *q* er indbyrdes primiske naturlige tal. Så er

$$(9a+4)\cdot q^2 = (a-6)\cdot p^2 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{-6p^2-4q^2}{9q^2-p^2} = 6 - \frac{58q^2}{9q^2-p^2} \;.$$

Her må $9q^2 - p^2$ gå op i $58q^2$. Men da $9q^2 - p^2$ er primisk med q^2, må $9q^2 - p^2$ gå op i 58, dvs. $(3q - p)(3q + p)$ går op i 58. De mulige værdier for produktet er altså

$$(3q - p)(3q + p) \;:\; 1 \;,\; 2 \;,\; 29 \;,\; 58 \;.$$

Kun ligningen

$$(3q - p)(3q + p) = 29$$

har løsninger, nemlig gennem følgende ligningssystem:

$$3q - p = 1$$
$$3q + p = 29 \,,$$

hvoraf $p = 14$, $q = 5$. Dermed er

$$a = \frac{-6\cdot 14^2 - 4\cdot 5^2}{9\cdot 5^2 - 14^2} = -44 \;.$$

Vi får, at

$$\sqrt{\frac{9a+4}{a-6}} = \sqrt{\frac{9\cdot(-44)+4}{-44-6}} = \sqrt{\frac{-392}{-50}} = \sqrt{\frac{196}{25}} = \frac{14}{5} \;.$$