Svar på opgave 311 (August 2014)

Opgave:

Bestem alle naturlige tal x, y og z, hvor $x > y > z$, så

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1 \ .$$

Besvarelse:

Det er klart, at hvis (x,y,z) er en løsning, så er $z > 3$. Vi gennemgår alle muligheder.

I. z = 4. Så er

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4y+8x=xy \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)(y-8)=32 \ .$$

Idet $x > y$ har vi kombinationerne

$$x - 4 = 16 \text{ og } y - 8 = 2 \text{ hvoraf } x = 20 , y = 10$$
$$x - 4 = 32 \text{ og } y - 8 = 1 \text{ hvoraf } x = 36 , y = 9 \ .$$

II. z = 5. Her er

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5y+10x=2xy \quad \Leftrightarrow \quad (2x-5)(y-5)=25 \ .$$

Løsninger er her $x = 15$, $y = 6$.

III. z = 6. Vi får

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad xy-4x-2y=0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)(y-4)=8 \ .$$

Denne ligning har ingen løsninger med $x > y > z$.

IV. z > 6. Her er også $x > 6$ og $y > 6$ og dermed

$$\frac{1}{x}<\frac{1}{6} \quad , \quad \frac{2}{y}<\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{3}{z}<\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \ ,$$

hvoraf

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}<\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1 \ ,$$

så der ikke findes nogen løsninger. I alt har vi fundet løsningerne

$$(x,y,z) \ : \ (20,10,4) \ , \ (36,9,4) \ , \ (15,6,5) \ .$$

Hvis man forlader kravet $x > y > z$, hvilke løsninger fremkommer så?