Svar på opgave 312
(September 2014)

Opgave:

Løs inden for de komplekse tal ligningen

$$\left|\, z-|z+1| \,\right| = \left|\, z+|z-1| \,\right| .$$

Besvarelse:

1. metode

Vi sætter $z = a + ib$ og benytter i det følgende, at $\left|\, x+iy \,\right| = x^2 + y^2$. Ligningen er ensbetydende med

$$\left|a-|z+1|+ib\right| = \left|a+|z-1|+ib\right| \quad \Leftrightarrow \quad \left(a-|z+1|\right)^2 + b^2 = \left(a+|z-1|\right)^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a-|z+1|\right)^2 = \left(a+|z-1|\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad a-|z+1| = \pm\left(a+|z-1|\right) \; .$$

Vi deler op i tilfælde.

I. $a-|z+1| = a+|z-1|$.

Her er ligningen

$$-\,|z+1| = |z-1|.$$

Her er ingen løsninger, da venstre og højre side ikke samtidig kan blive 0 og venstre side er ikke-positiv mens højre side er ikke-negativ.

II. $a-|z+1| = -a-|z-1|$.

Ligningen er

$$2a = |z+1|-|z-1| \quad \Leftrightarrow \quad 2a = |a+1+ib|-|a-1+ib|$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a = \sqrt{(1+a)^2+b^2} - \sqrt{(a-1)^2+b^2} \; . \qquad (1)$$

Hvis $a = 0$ får vi

$$\sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+b^2} = 0 \; ,$$

så alle tal af formen $z = ib$ er løsninger, dvs. alle imaginære tal.

Lad så $a \neq 0$. Vi multiplicerer ligningen (1) med $\sqrt{(1+a)^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2}$ på begge sider, og får

$$2a\left(\sqrt{(1+a)^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2}\right) = (1+a)^2 + b^2 - (a-1)^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2a\left(\sqrt{(1+a)^2+b^2} + \sqrt{(a-1)^2+b^2}\right) = 4a$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{(1+a)^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+b^2}=2\,. \qquad (2)$$

Addition af (1) og (2) giver

$$2a+2=2\sqrt{(1+a)^2+b^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1+a=\sqrt{(1+a)^2+b^2}\,. \qquad (3)$$

Subtraktion af (1) og (2) giver

$$2a-2=-2\sqrt{(a-1)^2+b^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1-a=\sqrt{(1-a)^2+b^2}\,. \qquad (4)$$

Af (4) ses, at $a > 1$ ikke giver nogen løsning og af (3) følger, at $a < -1$ ikke giver nogen løsning. Hvis $-1 \le a \le 1$, giver (3) og (4) løsningen $b = 0$.
Den oprindelige lignings løsninger er altså

$$z = a \quad (-1 \le a \le 1) \qquad \text{og} \qquad z = ib$$

dvs. reelle tal i [-1;1] samt rent imaginære tal.

2. metode

Vi har, at

$$\big|z-|z+1|\big| = \big|z+|z-1|\big| \quad \Leftrightarrow \quad \big|z-|z+1|\big|^2 = \big|z+|z-1|\big|^2\,.$$

For komplekse tal gælder, at $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$, så vi får

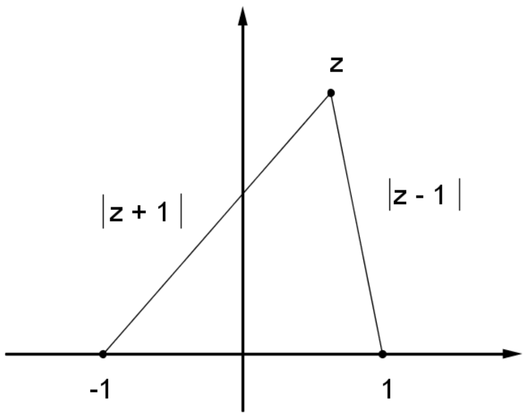
$$\left(z-|z+1|\right)\cdot\left(\bar{z}+|z-1|\right)=\left(z+|z-1|\right)\cdot\left(\bar{z}+|z-1|\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad z\cdot\bar{z}-(z+\bar{z})|z+1|+|z+1|^2 = z\cdot\bar{z}+(z+\bar{z})|z-1|+|z-1|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad |z+1|^2-|z-1|^2=(z+\bar{z})\left(|z+1|+|z-1|\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (z+1)(\bar{z}+1)-(z-1)(\bar{z}-1)=(z+\bar{z})\left(|z+1|+|z-1|\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2(z+\bar{z})=(z+\bar{z})\left(|z+1|+|z-1|\right) \quad \Leftrightarrow \quad z+\bar{z}=0 \ \vee\ |z+1|+|z-1|=2\,.$$



Den første ligning har løsningerne $z = bi$, hvor $b \in R$, dvs. samtlige imaginære tal.
Tallene $|z+1|$ og $|z-1|$ angiver afstandene fra det komplekse tal z til de reelle tal -1 og 1. Vi ser på en figur, at summen af disse afstande kun kan være 2, hvis z ligger i intervallet [-1;1] på den reelle akse.