Svar på opgave 313 (Oktober 2014)

Opgave:

a. Find det mindste positive hele tal, hvis tredjepotens ender på …888.

b. Lad *m* være det mindste positive hele tal, der opfylder at $\sqrt[3]{m} < n + r$,

hvor *n* er hel og positiv og $0 < r < \frac{1}{1000}$. Find *n*. Med andre ord: Bestem det mindste positive hele tal *m*, hvis kubikrod overstiger et helt tal med mindre end $\frac{1}{1000}$.

Besvarelse:

a.

1. metode.
Hvis tredjepotensen af et tal *n* ender på 8, må tallet selv ende på 2, dvs. vi har, at $n = 10k + 2$, så

$$n^3 = (10k + 2)^3 = 1000k^3 + 600k^2 + 120k + 8$$

Her bestemmer leddet $120k$ det næstsidste ciffer i n^3, som også er 8. Men så må $12k$ en- de på 8 og det medfører, at *k* ender på 4 eller 9. Altså må *k* være af formen $k = 5m + 4$. Dermed er

$$n^3 = (10(5m + 4) + 2)^3 = (50m + 42)^3$$

$$= 125000m^3 + 315000m^2 + 264600m + 74088$$

De første to led ender på …000 og sidste led på …088, så vi slutter, at leddet $264600m$ må ende på 800, dvs. $2646m$ må ende på 8. Den mindste værdi af *m*, der opfylder dette, er $m = 3$. Altså er

$$k = 5\cdot3+4 = 19 \quad \text{og} \quad n = 10\cdot19+2 = 192$$

Faktisk er $192^3 = 7\,077\,888$.

2. metode.
Der findes ingen 1-cifrede tal, der opfylder kravet. Vi ser på 2-cifrede tal. Her skal sidste ciffer være 2, så vi sætter $m = 10p + 2$. Så er

$$m^3 = 1000p^3 + 600p^2 + 120p + 8$$

Leddet $120p$ giver næstsidste ciffer i m^3, så den eneste mulighed er $p = 9$, fordi $120 \cdot 9 = 1080$. Men $92^3 = 778688$ opfylder ikke kravet.

Vi ser så på 3-cifrede tal. Problemet er indkredset så langt, at sidste ciffer skal være 2 og næstsidste 9. Altså sætter vi $m = 100p + 92$ og får

$$m^3 = 10^6 \cdot p^3 + 2760000p^2 + 2539200p + 778688$$

Førstegradsleddet giver bidrag til tredjesidste ciffer i m^3, så $p = 1$. Det mindste tal med den ønskede egenskab hat altså kun mulighed for at være 192, og kontrol giver, at $192^3 = 7077888$, der opfylder kravet.

Kan problemet generaliseres? Findes der tredjepotenser, der ende på …8888? Og i bekræftende fald, hvad er det mindste sådanne tal? Findes der fjerdepotenser, der ender på en række ens cifre?

b.

Vi skal finde et helt positivt tal n således, at der findes et tal m, der opfylder, at

$$n < \sqrt[3]{m} < n + \tfrac{1}{1000} \quad \text{eller} \quad n^3 < m < \left(n + \tfrac{1}{1000}\right)^3$$

Hvis et tal m opfylder dette, er $n^3 + 1$ det mindste sådanne m, dvs.

$$n^3 + 1 < \left(n + \tfrac{1}{1000}\right)^3 \tag{1}$$

Denne ulighed er ensbetydende med

$$n^3 + 1 < n^3 + 3n^2 \cdot 10^{-3} + 3n \cdot 10^{-6} + 10^{-9}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 < \frac{3}{1000} n^2 + \frac{3}{1\,000\,000} n + 10^{-9} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1000}{3} < n^2 + \frac{1}{1000} n + \frac{1}{3\,000\,000} .$$

Derfor må n^2 være tæt ved $\frac{1000}{3} \approx 333$, fordi de to sidste led er ret små. Nu er

$$18^2 < \tfrac{1000}{3} < 19^2 ,$$

så vi formoder, at $n = 18$ eller $n = 19$.
Hvis $n = 18$, er (1) ikke opfyldt, idet

$$18^3 + 1 = 5833 \quad \text{og} \quad 18{,}001^3 = 5832{,}972\ldots.$$

men $n = 19$ giver

$$19^3 + 1 = 6860 \quad \text{og} \quad 19{,}001^3 = 6860{,}08306\ldots$$

Altså er 6860 det mindste positive hele tal (som ikke er et kubiktal), hvis kubikrod har en decimaldel på under $\frac{1}{1000}$. Faktisk er

$$\sqrt[3]{6860} = 19{,}00092332...$$

Det er selvfølgelig let at løse problemet med regnemaskine, idet vi blot fra en ende af behøver at gennemgå tallene

$$\sqrt[3]{k^3 + 1} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots$$

indtil vi finder et, hvis decimaldel er under $\frac{1}{1000}$.