Svar på opgave 314 (November 2014)

Opgave:

a. Findes der et kvadrattal med tværsum 2014?

b. Findes der 2014 konsekutive positive hele tal, hvis sum er et kvadrattal?
Samme spørgsmål for tallet 2015.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi ser på kvadrattallene modulo 9 og får tabellen

a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
a^2 (mod 9)	1	4	0	7	7	0	4	1	0	1	4	0	7	7

Det er ikke svært at se, at kvadrattal er kongruente med 0, 1, 4 eller 7 modulo 9.

Vi viser, at hvis $n \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod 9$, så findes et kvadrattal med tværsum n, og da $2014 \equiv 7 \pmod 9$, gælder dette altså også for 2014.

Vi deler undersøgelserne op i tilfælde efter kongruensen modulo 9, idet vi i hvert til- fælde angiver en løsning til opgaven. Vi betegner med $q(a)$ tværsummen for tallet a.

I. Vi udregner

$$99^2 = 9801 \quad , \quad 999^2 = 998001 \quad , \quad 9999^2 = 999\ 8\ 000\ 1$$

og i almindelighed er

$$\underbrace{999\ldots99}_{k \text{ cifre}}{}^2 = \underbrace{999\ldots9}_{k\text{-1 cifre}}\ 8\ \underbrace{000\ldots0}_{k\text{-1 cifre}}\ 1$$

så vi får

$$q(999\ldots99^2) = 9(k-1) + 8 + 1 = 9k \equiv 0 \pmod 9 .$$

II. Vi udregner

$$991^2 = 982081 \quad , \quad 9991^2 = 99820081 \quad , \quad 99991^2 = 999\ 8\ 2\ 000\ 81 \quad ,$$

og i almindelighed er

$$\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}}1^2 = \underbrace{999\ldots9}_{k\text{-1 cifre}}\,82\,\underbrace{000\ldots0}_{k\text{-1 cifre}}\,81$$

så tværsummen er

$$q(999\ldots91^2) = 9(k-1) + 8 + 2 + 8 + 1 = 9k + 10 \equiv 1 \pmod 9) .$$

III. Vi udregner

$$992^2 = 984064 \quad , \quad 9992^2 = 99\,84\,00\,64 \quad , \quad 99992^2 = 999\,84\,000\,64 ,$$

og i almindelighed får vi

$$\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}}2^2 = \underbrace{999\ldots9}_{k\text{-1 cifre}}\,84\,\underbrace{000\ldots0}_{k\text{-1 cifre}}\,64$$

og tværsummen bliver

$$q(999\ldots92^2) = 9(k-1) + 8 + 4 + 6 + 4 = 9k + 13 \equiv 4 \pmod 9)$$

IV. Udregn nu:

$$994^2 = 988036 \quad , \quad 9994^2 = 99\,88\,00\,36 \quad , \quad 99994^2 = 999\,88\,000\,36 \quad ,$$

og i almindelighed er

$$\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ cifre}}4^2 = \underbrace{999\ldots9}_{k\text{-1 cifre}}\,88\,\underbrace{000\ldots0}_{k\text{-1 cifre}}\,36$$

og tværsummen er

$$q(999\ldots94^2) = 9(k-1) + 8 + 8 + 3 + 6 = 9k + 16 \equiv 7 \pmod 9) .$$

For 2014 skal vi specielt vælge k, så

$$9k + 16 = 2014 \quad \Leftrightarrow \quad k = 222 ,$$

så vi får

$$q(\underbrace{999\ldots99}_{222 \text{ cifre}}\,4^2) = q(\underbrace{999\ldots99}_{221 \text{ cifre}}\,88\,\underbrace{000\ldots00}_{221 \text{ cifre}}\,36) = 9 \cdot 221 + 8 + 8 + 3 + 6 = 2014 .$$

2. metode **(Asger Olesen, Tønder).**

Tallet

$$(10^{224}-5)^2 = \underbrace{999\ldots99}_{223 \text{ cifre}}\,\underbrace{00\ldots00}_{223 \text{ cifre}}\,25$$

har tværsummen 2014:

$$223 \cdot 9 + 2 + 5 = 2014 .$$

Lad nemlig $n \geq 2$ være et naturligt tal. Vi finder et tal med 'mange' 9-taller:

$$(10^n - 5)^2 = (10^n)^2 - 10 \cdot 10^n + 25 = 10^n \cdot (10^n - 10) + 25 = 10^n \cdot \underbrace{999\ldots99}_{n\text{-1 cifre}}\,0 + 25$$

$$= \underbrace{999\ldots99}_{n\text{-1 cifre}}\,\underbrace{000\ldots00}_{n+1 \text{ cifre}} + 25 = \underbrace{999\ldots99}_{n\text{-1 cifre}}\,\underbrace{000\ldots00}_{n\text{-1 cifre}}\,25$$

Tvæsummen af dette tal er $9(n - 1) + 2 + 5 = 9n - 2$ og derfor må

$$9n - 2 = 2014 \quad \Leftrightarrow \quad n = 224 \; .$$

Dette giver det oven for nævnte tal. Vil man have flere af slagsen, kan man gange dette tal med potenser af 100.

3. metode **(Šefket Arslanagić, Sarajevo).**

Vi ser, at

$$1225 = 35^2 \quad \text{eller} \quad 1225 = [\tfrac{1}{3}(10^2+5)]^2 = 35^2$$
$$112225 = 335^2 \quad \text{eller} \quad 112225 = [\tfrac{1}{3}(10^3+5)]^2 = 335^2$$

og i almindelighed er

$$\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cifre}}\ \underbrace{222\ldots22}_{n+1 \text{ cifre}}\ 5 = \underbrace{333\ldots33}_{n \text{ cifre}}5^2$$

eller

$$\underbrace{111\ldots11}_{n \text{ cifre}}\ \underbrace{222\ldots22}_{n+1 \text{ cifre}}\ 5 = [\tfrac{1}{3}(10^{n+1}+5)]^2 \ .$$

Hvis vi vælger $n = 669$ er tværsummen af tallet $[\tfrac{1}{3}(10^{670}+5)]^2$ lig med

$$669 \cdot 1 + 670 \cdot 2 + 5 = 2014$$

b.

Lad a være et vilkårligt positivt tal. Summen s af de 2014 konsekutive tal a, $a + 1$, $a + 2, \ldots, a + 2013$ er

$$s = \tfrac{1}{2} \cdot 2014 \cdot (2a + 2013) = 19 \cdot 53 \cdot (2a + 2013) \ .$$

Hvis dette er et kvadrattal, findes et helt positivt tal b så

$$b^2 = 19 \cdot 53 \cdot (2a + 2013) \ .$$

Da 19 og 53 er primtal, findes et helt positivt tal c, så

$$2a + 2013 = 19 \cdot 53 \cdot c^2 \ .$$

Her er $c > 1$ og desuden er c ulige, fordi venstre side af lighedstegnet er ulige. I så fald er

$$a = \tfrac{1}{2}\left(19 \cdot 53 \cdot c^2 - 2013\right) \ ,$$

som er et helt positivt tal. Der er altså uendelig mange løsninger til opgaven. Hvis vi vælger $c = 3$, får vi

$$a = \tfrac{1}{2}\left(19 \cdot 53 \cdot 9 - 2013\right) = 3525 \ .$$

Så er

$$3525 + 3526 + \cdots + 5538 = 1007 \cdot (7050 + 2013) = 9\,126\,441 = 3021^2 \ .$$

en sum af 2014 konsekutive hele positive tal, der er et kvadrattal.

Vi søger dernæst en sum af 2015 konsekutive hele positive tal, der er et kvadrattal. Her er

$$s = a + (a+1) + \cdots + (a + 2014) = \tfrac{1}{2} \cdot 2015 \cdot \left(2a + 2014\right)$$
$$= 2015 \cdot (a + 1007) = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot (a + 1007) \ .$$

Vi søger altså tallet b, så

$$b^2 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot (a + 1007) \ ,$$

dvs. et tal c, så

$$a + 1007 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot c^2 \ ,$$

hvoraf

$$a = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot c^2 - 1007 \quad .$$

Hvis vi vælger $c = 1$ er

$$a = 5 \cdot 13 \cdot 31 - 1007 = 1008 \quad ,$$

og dermed er

$$s = 1008 + 1009 + \cdots + 3022 = 5 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 2015 = 2015^2$$

en sum af den ønskede art.