Svar på opgave 317 (Februar 2015)

Opgave:

Løs inden for de reelle tal ligningssystemet

$$x^3 + y^3 = 3y + 3z + 4$$
$$y^3 + z^3 = 3z + 3x + 4$$
$$z^3 + x^3 = 3x + 3y + 4$$

Besvarelse:

1. metode.

Subtraktion af den anden ligning fra den første og tredje ligning for den anden giver

$$x^3 - z^3 = 3(y - x) \quad (1)$$

og

$$y^3 - x^3 = 3(z - y) \quad (2)$$

Antag først, at $y \geq x$. Af (1) fås, at $x^3 \geq z^3$ og dermed $x \geq z$. Da $y \geq x$ fås $y^3 \geq x^3$ og af (2) følger så, at $z \geq y$. Altså har vi i alt fået, at $y \geq x \geq z \geq y$, dvs. $x = y = z$.
Hvis vi forudsætter $y \leq x$, følger efter samme metode, at $y \leq x \leq z \leq y$. For enhver løsning gælder altså $x = y = z$. De tre ligninger er dermed ensbetydende med

$$x^3 + x^3 = 3x + 3x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee x = -1 .$$

De eneste mulige løsninger er altså

$$(x,y,z) \ : \ (-1,-1,-1) \ , \ (2,2,2) \ ,$$

og ved indsættelse ses, at disse faktisk er løsninger.

2. metode.

Addition af første og tredje ligning giver

$$2x^3 + y^3 + z^3 = 3x + 6y + 3z + 8 \ ,$$

og trækkes den anden ligning fra denne, fås

$$2x^3 + y^3 + z^3 - (y^3 + z^3) = 3x + 6y + 3z + 8 - (3z + 3x + 4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^3 = 6y + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 3y + 2$$

Analogt fås

$$y^3 = 3z + 2 \quad \text{og} \quad z^3 = 3x + 2 \ .$$

Subtraktion af 8 i disse tre ligninger giver

$$x^3 - 8 = 3y - 6 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = 3(y - 2)\ ,$$

og tilsvarende

$$(y - 2)(y^2 + 2y + 4) = 3(z - 2) \quad \text{og} \quad (z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 3(x - z)\ .$$

Multiplikation af de sidste tre ligninger giver

$$(x - 2)(y - 2)(z - 2)(x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)(z^2 + 2z + 4)$$
$$= 27(x - 2)(y - 2)(z - 2)\ .$$

Hvis et af de tre tal x, y og z er lig med 2, fx $x = 2$, følger $y = 2$ og $z = 2$.
Hvis ingen af de tre tal x, y og z er lig med 2, får vi ved division med de fælles fakto- rer ligningen

$$(x^2 + 2x + 4)(y^2 + 2y + 4)(z^2 + 2z + 4) = 27$$
$$\Leftrightarrow \quad ((x + 1)^2 + 3)\ ((y + 1)^2 + 3)\ ((z + 1)^2 + 3) = 27$$

og denne ligning er kun opfyldt for $(x,y,z) = (-1,-1,-1)$.

3. metode.

Som under 2. metode får vi

$$x^3 = 3y + 2 \quad , \quad y^3 = 3z + 2 \quad , \quad z^3 = 3x + 2\ ,$$

hvoraf

$$y = \tfrac{1}{3}(x^3 - 2) \quad , \quad z = \tfrac{1}{3}(y^3 - 2) \quad , \quad x = \tfrac{1}{3}(z^3 - 2)\ . \tag{3}$$

Funktionen $f(x) = \tfrac{1}{3}(x^2 - 2)$ er voksende og efter (3) har vi, at

$$y = f(x) \quad , \quad z = f(y) \quad , \quad x = f(z)\ . \tag{4}$$

Antag, at (x,y,z) er en løsning, hvor $x \le y \le z$. Da f er voksende er

$$f(x) \le f(y) \le f(z)\ ,$$

og dette er efter (4) ensbetydende med, at

$$y \le z \le x\ .$$

Altså må $x = y = z$. Hvis x, y og z har en anden indbyrdes beliggenhed på tallinjen, fås også, at $x = y = z$.
Vi skal nu blot løse

$$f(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3}(x^3 - 2) = x\ ,$$

hvilket giver $x = -1$ eller $x = 2$. Altså er de mulige løsninger $(x,y,z) = (-1,-1,-1)$ og $(x,y,z) = (2,2,2)$. Indsættelse viser, at disse faktisk er løsninger.