Svar på opgave 321 (August 2015)

Opgave:

a. Løs inden for de reelle tal ligningen

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}\ .$$

b. Find samtlige løsningssæt (w,z) inden for de komplekse tal, hvor $w \neq z$, til ligningssystemet

$$w^5 + w = z^5 + z$$
$$w^5 + w^2 = z^5 + z^2\ .$$

Besvarelse:

a.

1. metode.

Vi har, at

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)\ ,$$

og hvis vi sætter

$$a=\sqrt[3]{x+1} \quad \text{og} \quad b=\sqrt[3]{3x+1}\ ,$$

får vi

$$\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3 = x+1+3x+1+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)^3 = 4x+2+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)\ .$$

I den givne ligning opløfter vi til 3. potens på begge sider af lighedstegnet:

$$3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)+4x+2=x-1$$
$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=-3x-3$$

Parentesen kan substitueres med den oprindelige lignings højre side:

$$3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{x-1}=-3x-3 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)((3x+1)(x-1)+(x+1)^2)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad (x+1)\cdot 4x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=-1.$$

Her er kun x = -1 løsning til den oprindelige ligning.

2. metode.

Vi har, at

$$3x + 1 > x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \qquad \text{og} \qquad 3x + 1 < x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \ .$$

For $x > -1$ er $\sqrt[3]{x+1} > 0$, så

$$\sqrt[3]{3x+1} > \sqrt[3]{x-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} > \sqrt[3]{x-1} \ .$$

For $x < -1$ er $\sqrt[3]{x+1} < 0$, så

$$\sqrt[3]{3x+1} < \sqrt[3]{x-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} < \sqrt[3]{x-1} \ .$$

Dermed er $x = -1$ den eneste mulige løsning, og ved indsættelse ses, at $x = -1$ faktisk er løsning.

b.

Subtraktion af de to ligninger giver

$$w - w^2 = z - z^2 \quad \Leftrightarrow \quad w - z = w^2 - z^2$$

$$\Leftrightarrow \quad w - z = (w + z)(w - z) \quad \Leftrightarrow \quad (w - z)(w + z - 1) = 0 \ ,$$

og da $w \neq z$ gælder

$$w + z = 1 \ . \tag{1}$$

Kvadrering giver

$$w^2 + z^2 = 1 - 2wz \ , \tag{2}$$

og endnu en kvadrering:

$$w^4 + z^4 = 1 - 4wz + 2w^2z^2 \ . \tag{3}$$

Den første af de givne ligninger omskrives til

$$w^5 - z^5 = z - w \quad \Leftrightarrow \quad (w - z)(w^4 + w^3z + w^2z^2 + wz^3 + z^4) = z - w$$

$$\Leftrightarrow \quad w^4 + w^3z + w^2z^2 + wz^3 + z^4 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w^4 + z^4 + wz(w^2 + z^2 + wz) + 1 = 0 \ .$$

Heri indsættes (2) og (3):

$$1 - 4wz + 2w^2z^2 + wz(1 - 2wz + wz) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (wz)^2 - 3wz + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad wz = 1 \ \vee \ wz = 2 \ .$$

Vi deler op i to tilfælde.

I. $z = \frac{1}{w}$. Efter (1) giver dette:

$$w + \frac{1}{w} = 1 \ \Leftrightarrow \ w^2 - w + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ w = \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ ,$$

hvoraf

$$z = 1 - w = 1 - \frac{1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \frac{1 \mp \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \ .$$

Løsninger er altså

$$(w,z)=\left(\frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\ ,\ \frac{1\mp \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)\ .$$

II. $z=\frac{2}{w}$. Efter (1) er

$$w+\frac{2}{w}=1\ \Leftrightarrow\ w^2-w+2=0\ \Leftrightarrow\ w=\frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\ ,$$

hvoraf

$$z=1-w=1-\frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}=\frac{1\mp \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\ .$$

Løsninger er altså

$$(w,z)=\left(\frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\ ,\ \frac{1\mp \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}\right)\ .$$

I alt har vi fundet fire løsningssæt.