Svar på opgave 323 (Oktober 2015)

Opgave:

a. Tre reelle tal x, y og z opfylder, at

$$x + y + z = 2 \quad \text{og} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ .$$

Vis, at alle tre tal ligger i intervallet $\left[-\frac{2}{3};2\right]$.

b. Tallene x, y og z er positive, og

$$\frac{xy}{x+y} = a \quad , \quad \frac{xz}{x+z} = b \quad , \quad \frac{yz}{y+z} = c \ .$$

Bestem x, y og z udtrykt ved a, b og c.

Besvarelse:

a.

1. metode.

Ligningerne er symmetriske i x, y og z, så vi behøver blot at vise, at et af tallene ligger i det nævnte interval.

Vi får, at

$$y + z = 2 - x \quad \text{og} \quad y^2 + z^2 = 4 - x^2 \ . \tag{1}$$

Nu er $y^2 + z^2 \geq 2yz$, hvoraf

$$2y^2 + 2z^2 \geq 2yz + y^2 + z^2 \iff 2(y^2 + z^2) \geq (y + z)^2 \iff y^2 + z^2 \geq \tfrac{1}{2}(y + z)^2 \ .$$

Efter ligningerne (1) har vi dermed, at

$$4 - x^2 \geq \tfrac{1}{2}(2 - x)^2 \iff 3x^2 - 4x - 4 \leq 0$$

$$\iff (3x + 2)(x - 2) \leq 0 \iff -\tfrac{2}{3} \leq x \leq 2 \ .$$

2. metode (Walther Janous, Innsbruck & Jens Søren K. Andersen, Esbjerg).

Vi finder at $y = 2 - z - x$, hvilket indsættes i den anden ligning:

$$x^2 + (2 - z - x)^2 = 4 - z^2 \iff x^2 + (z - 2)x + z^2 - 2z = 0 \ .$$

Denne andengradsligning i x giver

$$x = \frac{2 - z \pm \sqrt{(2-z)(3z+2)}}{2} \quad ,$$

hvoraf

$$y = \frac{2 - z \mp \sqrt{(2-z)(3z+2)}}{2} .$$

Da radikanden er ikke-negativ, må $-\frac{2}{3} \le z \le 2$. Samme krav gælder for x og y.

3. metode (Jens Søren K. Andersen, Esbjerg).

Her følger et let overskueligt rumgeometrisk argument. Første ligning beskriver i rummet en plan gennem punkterne *A* (2,0,0), *B* (0,2,0) og *C* (0,0,2). Den anden ligning beskriver en kugle med radius 2 og centrum i *O* (0,0,0). Bemærk, at punkterne *A*, *B* og *C* ligger på kuglen. Begge ligninger beskriver derfor den omskrevne cirkel til trekant ΔABC. Det er klart, at punktet *D* $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ligger i den nævnte plan, og at *D* har samme afstand til punkterne *A*, *B* og *C*. Altså er *D* centrum for den omskrevne cirkel til trekant *ABC*. Bevæger vi os nu på rundt på cirklen med start i *C* og ser hvad der sker med *z*-koordinaten. C er det punkt på cirklen med den højeste *z*-koordinat (højeste værdi af *z*-koordinaten på cirklen er 2) og herefter falder *z*-koordinaten indtil vi når halvvejs rundt på cirklen, hvorefter den stiger igen på vejen tilbage til *C*. Den mindste *z*-koordinat finder vi så i det diametralt modsatte punkt *E* til *C* på cirklen. Stigningen i *z*-koordinat fra *D* til *C* er $\frac{4}{3}$, hvilket er lig med faldet i *z*-koordinat fra *D* til *E*. Derfor har *E* *z*-koordinaten $\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$.

b.

1. metode.
Vi får af den første ligning, at

$$\frac{xy}{x+y} = a \iff xy = ax + ay \iff x(y-a) = ay \iff x = \frac{ay}{y-a} . \qquad (2)$$

På samme måde får vi

$$\frac{xz}{x+z} = b \iff x = \frac{bz}{z-b} \quad \text{og} \quad \frac{yz}{y+z} = c \iff y = \frac{cz}{z-c} .$$

Vi indsætter udtrykket for *y* i (2):

$$x = \frac{a \cdot \frac{cz}{z-c}}{\frac{cz}{z-c} - a} = \frac{acz}{cz - a(z-c)} = \frac{acz}{cz - az + ac} . \qquad (3)$$

Endelig har vi

$$\frac{xz}{x+z} = b \iff xz = bx + bz \iff z(x-b) = bx \iff z = \frac{bx}{x-b} .$$

Denne værdi af *z* indsættes i (3):

$$x = \frac{acz}{cz - az + ac} = \frac{\frac{acbx}{x-b}}{\frac{cbx}{x-b} - \frac{abx}{x-b} + ac} = \frac{abcx}{bcx - abx + ac(x-b)} \ ,$$

hvoraf

$$1 = \frac{abc}{bcx - abx + ac(x-b)} \quad \Leftrightarrow \quad bcx - abx + acx - abc = abc$$

$$\Leftrightarrow \quad x(ac - ab + bc) = 2abc \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{2abc}{ac + bc - ab} \ .$$

På samme måde fås

$$y = \frac{2abc}{ab + bc - ac} \quad , \quad z = \frac{2abc}{ab + ac - bc} \ .$$

2. metode (Walther Janous, Innsbruck).

Ved reciprokdannelse fås

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{a} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a} \ ,$$

og tilsvarende fås af de to andre ligninger

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{b} \quad \text{og} \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{c} \ .$$

Addition giver

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ .$$

Heraf fås

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \ ,$$

så at

$$z = \frac{2abc}{ab + ac - bc} \ .$$

Tilsvarende findes x og y.