Svar på opgave 324 (November 2015)

Opgave:

a. Et polynomium $p(x)$ med hele koefficienter opfylder

$$p(1) = 11 < p(6) < p(13) = 215 < p(17) = 1115 .$$

Bestem $p(6)$.

b. Polynomiet $p(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 7$ har rødderne a, b og c. Bestem $a^2 + b^2 + c^2$ og $a^4 + b^4 + c^4$.

Besvarelse:

a. Vi ved, at der for hele tal x og y gælder, at $p(x) - p(y)$ er delelig med $x - y$. Altså er

$p(6) - p(1)$ delelig med 5,
$p(13) - p(6)$ er delelig med 7,
$p(17) - p(6)$ er delelig med 11.

Altså findes hele tal r, s og t, så

$$\begin{aligned} p(6) - p(1) = 5r &\quad\Leftrightarrow\quad p(6) = 11 + 5r , \\ p(13) - p(6) = 7s &\quad\Leftrightarrow\quad p(6) = 215 - 7s , \\ p(17) - p(6) = 11t &\quad\Leftrightarrow\quad p(6) = 1115 - 11t , \end{aligned}$$

For nemheds skyld sætter vi

$$r = a - 2 \ , \ s = 30 - b \ , \ t = 101 - c \ ,$$

så vi får

$$\begin{aligned} p(6) &= 11 + 5r = 11 + 5(a - 2) = 5a + 1 \\ p(6) &= 215 - 7s = 215 - 7(30 - b) = 7b + 5 \\ p(6) &= 1115 - 11t = 1115 - 11(101 - c) = 11c + 4 . \end{aligned}$$

Tallet $p(6)$ optræder altså i hver af talfølgerne

$$\begin{aligned} &1 , 6 , 11 , 16 , 21 , 26 , 31 , \ldots \\ &5 , 12 , 19 , 26 , 33 , 40 , 47 , \ldots \\ &4 , 15 , 26 , 37 , 48 , 59 , 70 , \ldots \end{aligned}$$

Altså finder vi, at $p(6) = 26$, som ligger i intervallet mellem $p(1) = 11$ og $p(13) = 215$. Den næste mulighed er 411, fordi

$$411 = 82 \cdot 5 + 1 = 58 \cdot 7 + 5 = 37 \cdot 11 + 4 ,$$

men da 411 overstiger $p(13)$ er denne værdi ikke brugbar.

Bemærk, at de tre differensfølger har differenserne 5, 7 og 11, som er indbyrdes pri- miske tal. Afstanden mellem fælles elementer i følgerne er derfor $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$, så det næste fælles tal efter 26 er $26 + 385 = 411$.

b. Vi finder funktionsværdierne

x	-1	0	1	2	7	8
$p(x)$	-7	7	5	-7	-7	47

Polynomiets tre reelle rødder a, b og c ligger derfor i intervallerne]-1;0[,]1;2[og]7;8[, og vi kan skrive, at

$$p(x) = (x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc .$$

Dermed er

$$a + b + c = 8 \quad \text{og} \quad ab + ac + bc = 5 .$$

Så får vi

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) = 8^2 - 2 \cdot 5 = 54 .$$

Da a, b og c er rødder i polynomiet er

$$a^3 = 8a^2 - 5a - 7 \quad , \quad b^3 = 8b^2 - 5b - 7 \quad , \quad c^3 = 8c^2 - 5c - 7 \quad , \tag{1}$$

og addition giver'

$$a^3 + b^3 + c^3 = 8(a^2 + b^2 + c^2) - 5(a + b + c) - 21 = 8 \cdot 54 - 5 \cdot 8 - 21 = 371 .$$

Endelig får vi af (1):

$$a^4 = 8a^3 - 5a^2 - 7a \quad , \quad b^4 = 8b^3 - 5b^2 - 7b \quad , \quad c^4 = 8c^3 - 5c^2 - 7c \quad ,$$

som ved addition giver

$$a^4 + b^4 + c^4 = 8(a^3 + b^3 + c^3) - 5(a^2 + b^2 + c^2) - 7(a + b + c)$$
$$= 8 \cdot 371 - 5 \cdot 54 - 7 \cdot 8 = 2642 .$$