Svar på opgave 325 (December 2015)

Opgave:

a. Bestem det mindste positive hele tal n, så

$$s = \mathrm{int}(\log 1) + \mathrm{int}(\log 2) + \cdots + \mathrm{int}(\log n) \geq 1000 .$$

b. Bestem det mindste positive hele tal m, så

$$t = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log m \geq 1000 .$$

Besvarelse:

a. Vi har, at

$$\mathrm{int}(\log k) = 0 \text{ for } k = 1, 2, 3, \ldots, 9$$
$$\mathrm{int}(\log k) = 1 \text{ for } k = 10, 11, \ldots, 99$$
$$\mathrm{int}(\log k) = 2 \text{ for } k = 100, 101, \ldots, 999 .$$

Hvis $n = 99$ er altså

$$s = \mathrm{int}(\log 10) + \mathrm{int}(\log 11) + \cdots + \mathrm{int}(\log 99) = 90$$

og $n = 999$ giver

$$s = \mathrm{int}(\log 10) + \mathrm{int}(\log 11) + \cdots + \mathrm{int}(\log 999) = 90 + 900 \cdot 2 = 1890 .$$

Derfor er det søgte tal n trecifret . Hvert trecifret tal bidrager med 2 til summen og der optræder n - 99 trecifrede tal i summen. Altså er

$$s = 90 + (n - 99) \cdot 2 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad 90 + 2n - 198 = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad n = 554 .$$

b.
1. metode.

Vi har, at

$$t = \log 1 + \log 2 + \cdots + \log m = \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m) = \log m! = \frac{\ln m!}{\ln 10} .$$

Efter Stirlings formel gælder med stor nøjagtighed tilnærmelsen

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \mathrm{e}^{\mu(n)} \quad , \quad \mu(n) = \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3} + \frac{1}{1260n^5} . \qquad (1)$$

Af (1) får vi

$$\ln m! \approx \ln\sqrt{2\pi} + \ln\sqrt{m} + m \cdot \ln\frac{m}{\mathrm{e}} + \frac{1}{12m} = \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{2}\ln m + m \cdot \ln m - m + \frac{1}{12m}$$
$$= 0{,}9189 + \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\ln m - m + \frac{1}{12m} .$$

Vi kræver, at m vælges, så

$$\log m! \geq 1000 \quad \Leftrightarrow \quad \ln m! \geq 1000 \cdot \ln 10 = 2301{,}585 \,.$$

Vi sætter

$$a(m) = 0{,}9189 + \left(m + \tfrac{1}{2}\right)\ln m - m + \frac{1}{12m}\,,$$

og finder

$$a(449) = 2297{,}026 \quad , \quad a(450) = 2303{,}135 \;.$$

Altså er den mindste værdi $m = 450$.

2. metode.

Grafen for funktionen $y = \log x$ er konkav, og vi prøver at udregne

$$\int_1^m \log x\, dx = \left[\frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10}\right]_1^m = \frac{m \cdot \ln m - m + 1}{\ln 10}$$

og

$$\int_2^{m+1} \log x\, dx = \left[\frac{x \cdot \ln x - x}{\ln 10}\right]_2^{m+1} = \frac{(m+1) \cdot \ln(m+1) - 2 \cdot \ln 2 - m + 1}{\ln 10}$$

Vi får en vurdering af m ved

$$\frac{m \cdot \ln m - m + 1}{\ln 10} < 1000 \quad \text{og} \quad \frac{(m+1) \cdot \ln(m+1) - 2 \cdot \ln 2 - m + 1}{\ln 10} > 1000.$$

Ligningen

$$\frac{m \cdot \ln m - m + 1}{\ln 10} = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad m \cdot \ln m - m = 2301{,}5851$$

har løsningen $m = 450{,}3967$ og ligningen

$$\frac{(m+1) \cdot \ln(m+1) - 2 \cdot \ln 2 - m + 1}{\ln 10} = 1000 \quad \Leftrightarrow \quad (m+1) \cdot \ln(m+1) - m = 2302{,}9714$$

har løsningen $m = 449{,}4599$. Altså er den søgte mindste værdi af m værdien 450. Ved udregning får vi

$$\log 450! = 1000{,}23889 \quad \text{og} \quad \log 449! = 997{,}58568 \;.$$